

Math. P. 148

Matheſis. Geometria generalis;
263.

ELEMENTS DE GEOMETRIE,

O U

T R A I T É

DE LA MESURE DU CORPS.

*Qui comprend huit Livres des Elements d'Euclide
& les plus beaux Theoremes d'Archymede.*

Touchant le Cercle, la Sphere, le Cilindre & le Cône.

PAR MR. **DE FISCHBACH**



A LA HAYE,

Chez **RUTGERT ALBERTS.** 1723.

ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE.

TRAITÉ
DE LA MESURE DU CORPS.

Par M. L. M. DE FISCHEBACH.

Bayerische
Staatsbibliothek
München



A

N O B L E

Et Généreux Seigneur & M^{re}.

ARENT DE RAET,

CONSEILLER ET

Bourguemaitre de Haerlem,

Député de la part de cette Vil-

le au College de Leurs No-

bles Puissances Messieurs les

Etats de Hollande & de West-

Frise, résident à la Haye &c.

&c. &c.

M

ONSIEUR,

C'est à l'abri de Votre Illus-

* 2

tre

E P I T R E.

tre Nom que j'ose donner ce petit Volume au Public. Vous avez bien daigné, Monsieur, m'accorder la grace de Vous offrir ces prémices de mes Etudes: il seroit sans doute de mon devoir & de ma reconnoissance de tracer ici les rares Qualitez & les Vertus dont le Ciel Vous a orné; mais outre que Vous m'avez témoigné mépriser les Loüanges, & que Vous les accusez la plûpart de Flaterie, je suis persuadé que mes Lecteurs me sçauront bon gré d'avoir laissé le soin de faire Vôte Eloge à une Plume plus éloquente que la mienne; ou, pour mieux dire, à la Voix Publique, dont je ne pourrois être qu'un très foible Interprête. Ce sont-là les rai-

E P I T R E.

raisons, Monsieur, qui m'arrê-
tent en si beau chemin. Tout
ce qui m'est permi en cette oc-
casion, c'est de faire un aveu
sincere devant toute la Terre
des grandes obligations que je
Vous ai, & de me servir de ce
même aveu, comme du seul
témoignage que je suis capable
de Vous donner de ma parfaite
reconnoissance pour toutes les
graces qu'il Vous a plû me fai-
re, & pour la protection dont
Vous avez bien voulu m'hono-
rer. Je ne pourrois oublier tant
de bienfaits qu'avec la derniere
ingratitude; mais j'ose Vous
protester ici, Monsieur, qu'ils
ne s'effaceront jamais de ma
mémoire, & que je chercherai
toutes les occasions possibles
* 2 de

E P I T R E.

de Vous témoigner avec combien de zèle & de respect.
Je suis.

MONSIEUR,

Votre très humble, très
obéissant & très dévoué
Serviteur.

DE FISCHBACH.

PRE-



P R E F A C E.

D*ANS un tems où tant d'Auteurs ont donné au jour des Traitez de Mathematiques & sur tout de Geométrie, je ne sçai comment j'ose me risquer à en donner les Elemens. J'avouë franchement qu'il ne me seroit jamais venu dans l'esprit de m'ériger en Auteur, ni d'écrire sur une matiere si souvent traitée par de très Savans Hommes, si quelques Amis, avec qui j'ai lû plusieurs Livres de Geométrie, dont les uns nous paroissoient obscurs & les autres embrouillez, tant par une quantité de Propositions mal pla-*

* 4

P R E F A C E.

placées, que par un grand nombre d'autres, démontrées par des raisonnemens tirés de voies trop éloignées, qui rendent cette Etude très pénible ; si ces Amis, dis-je ne m'avoient persuadé de faire part au Public du plus d'utilité qu'ils prétendent qu'il pourra tirer de mes Explications & de mes Démonstrations, que de celles de plus habiles gens que moi, qui ont suivi une route moins directe que la mienne. En effet on ne doit pas être surpris que si peu de gens veuillent s'attacher à cette belle Science, puisque la trop grande difficulté qui s'offre d'abord à la vue, rebute du premier coup ceux qui n'aiment pas beaucoup le travail, & qu'elle dégoûte & ennuie ceux même qui d'ailleurs auroient le cœur à l'ouvrage.

Quel est donc mon dessein ? c'est
de

P R E F A C E.

de m'attacher uniquement à éclaircir ces Elemens par tout où ils ne me sembleront pas assez bien expliqués & démontrez, & même de changer entierement les Démonstrations de toutes les Propositions qui me paroîtront prouvées par des voies trop éloignées, c'est-à-dire, par d'autres que celles dont elles dépendent naturellement.

Pour cet effet je commencerai premierement par expliquer les Termes & les Définitions le plus clairement & le plus distinctement qu'il me sera possible. En second lieu je changerai absolument la plûpart des Démonstrations du 1. 3. & 4^{me}. Livre : je tâcherai aussi de rendre familier le 5^{me}., qui est un des plus importants, en expliquant les Définitions, & démontrant les Propositions d'une maniere claire & nette; & qui
soit

P R E F A C E.

soit proportionnée aux forces de ceux qui ne font que commencer.

J'ai pareillement crû être obligé de mettre à la fin des Définitions du 6^{me}. Livre, deux Principes très solides & d'un grand usage, en vûë de lever les plus grandes difficultez qui se rencontrent dans ce Livre, dans l'11. & dans & le 12^{me}. même dans les Theoremes d'Archymede.

Le nom d'Auteur m'a d'abord effarouché ; je considerai quec'étoit un métier dangereux pour celui qui n'excelle pas dans la matiere qu'il entreprend, & que si son Ouvrage n'est pas absolument bon, il tombe infailliblement dans le mépris, & que s'il n'est que passable il trouve force envieux & autant de Critiques.

Ces Reflexions auroient été suffisan-

P R E F A C E.

fisantes pour m'empêcher de courir les risques de me faire imprimer ; risques que mes Amis n'ont pas apperçu comme moi. Je les leur ai représentez, & leur ai fait considérer qu'on ne manquera pas de me prêter la vanité de passer à mon âge pour plus habile que tant de grands Hommes qui ont travaillé sur la même matiere avant moi ; mais ils se sont servi de ces mêmes réflexions pour m'encourager , & m'ont garanti pour ainsi dire l'indulgence de mes Lecteurs, qui , sachant que je n'entre que dans ma vingt troisieme année , n'exigeront pas de moi ce qu'ils attendent d'un âge plus avancé.

Comme je ne suis pas François & que je ne possède la Langue que mediocrement , je prie le Lecteur de me passer quelques expressions qui pourroient choquer son oreille

P R E F A C E.

oreille. Tout le soin que j'ai pu prendre sur cet article, a été de m'attacher aux Termes de l'Art que j'ai exactement suivis.

Si malgré les défauts, qui peuvent se trouver dans mon Ouvrage, je suis assez heureux de l'avoir rendu de quelque utilité, & que le Public en reçoive la moindre satisfaction; je serai trop payé de mes peines; puisque son jugement décidera si je lui donnerai d'autres Ouvrages dans la suite, ou si je m'en tiendrai à celui-ci.



E L E.



ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
T R A I T E

DE LA MESURE DU CORPS.

*Qui comprend huit Livres des Ele-
mens d'Euclide & les plus beaux
Théoremes d'Archymede.*



UOIQUE mon dessein ne
soit pas dans ce petit traité
d'expliquer, (comme je l'ai
dit ailleurs) tous les Livres
des Elemens d'Euclide, mais
seulement les six premiers,
l'onzième & le douzième, je crois néan-
moins être obligé de répéter en passant,
que (suffisans pour l'intelligence de pres-
que

2 E L E M E N S D E

que toutes les Mathematiques) j'aurois crû étonner le Lecteur en lui raportant les autres, puisqu'étans en quelque façon inutiles, je suis très persuadé que j'aurois pu le rebuter en lui présentant de si longs Elemens, par l'idée qu'il se feroit pu former du grand travail conjecturé de sa longueur & de ses difficultés.



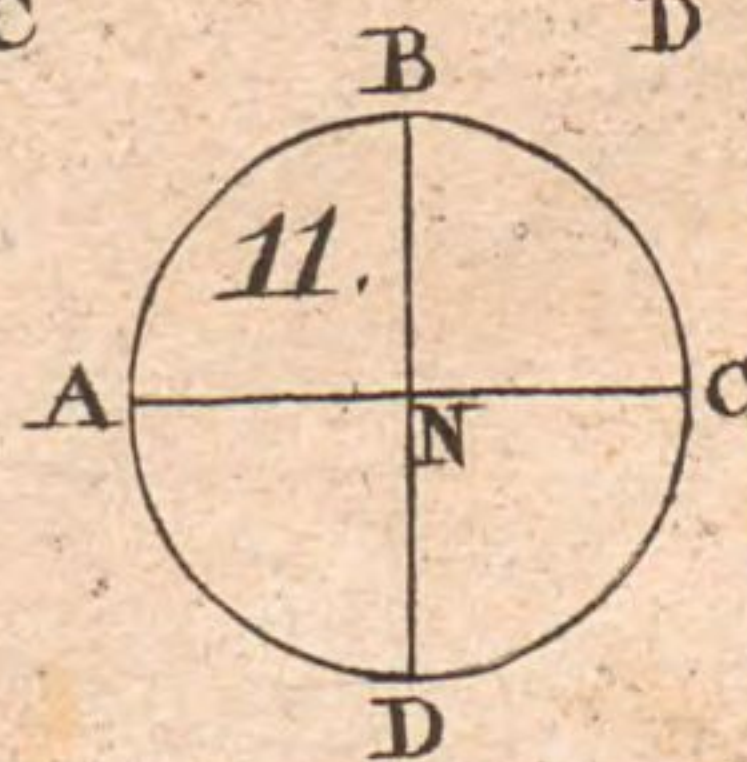
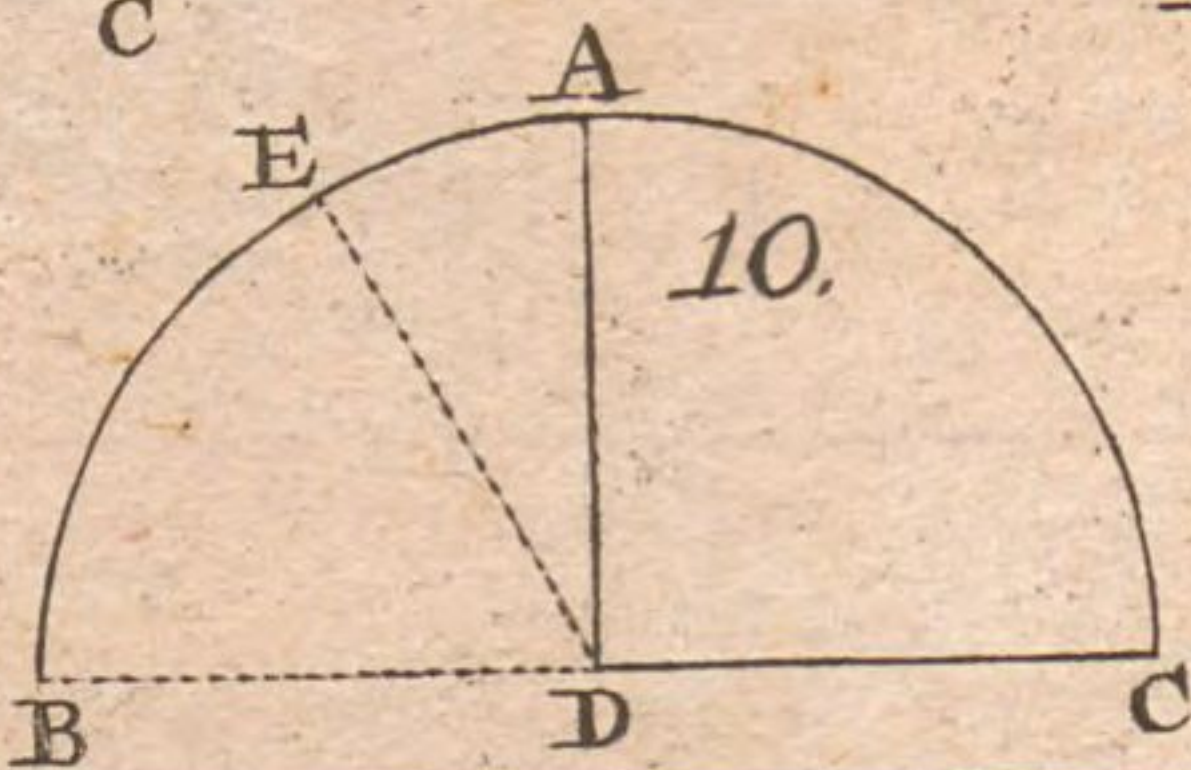
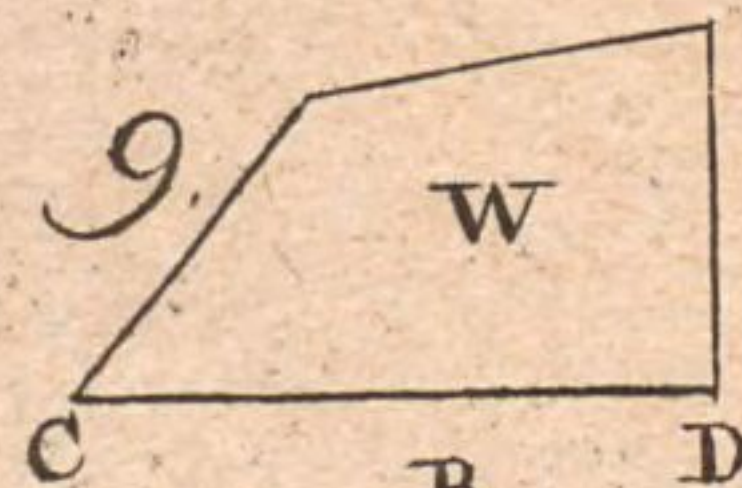
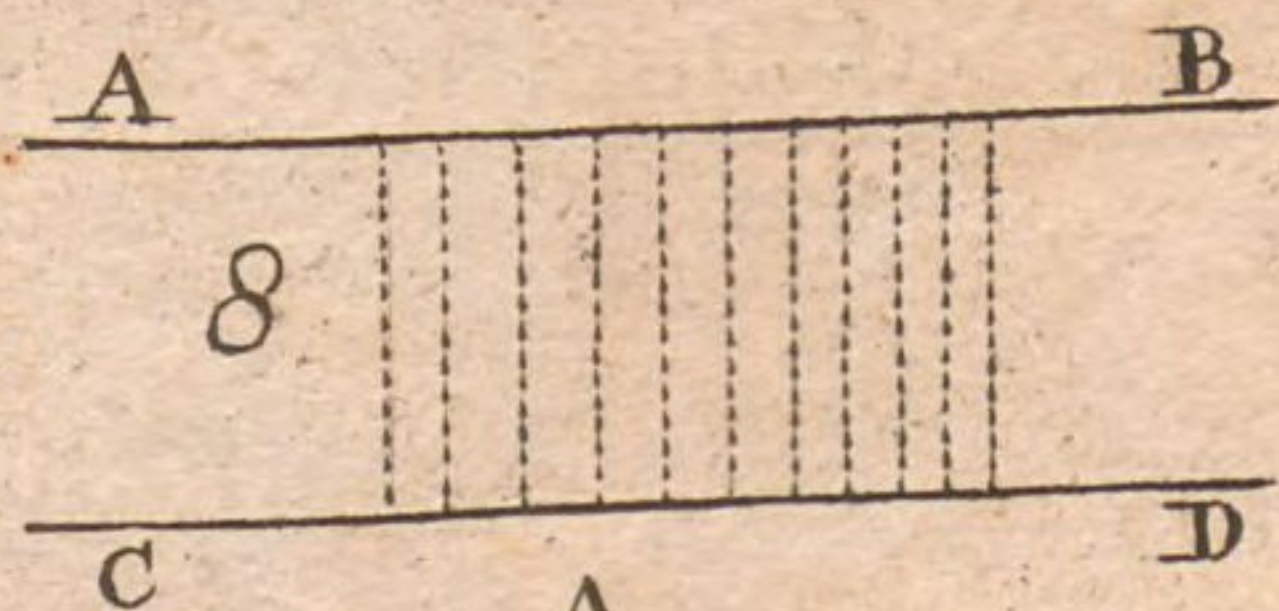
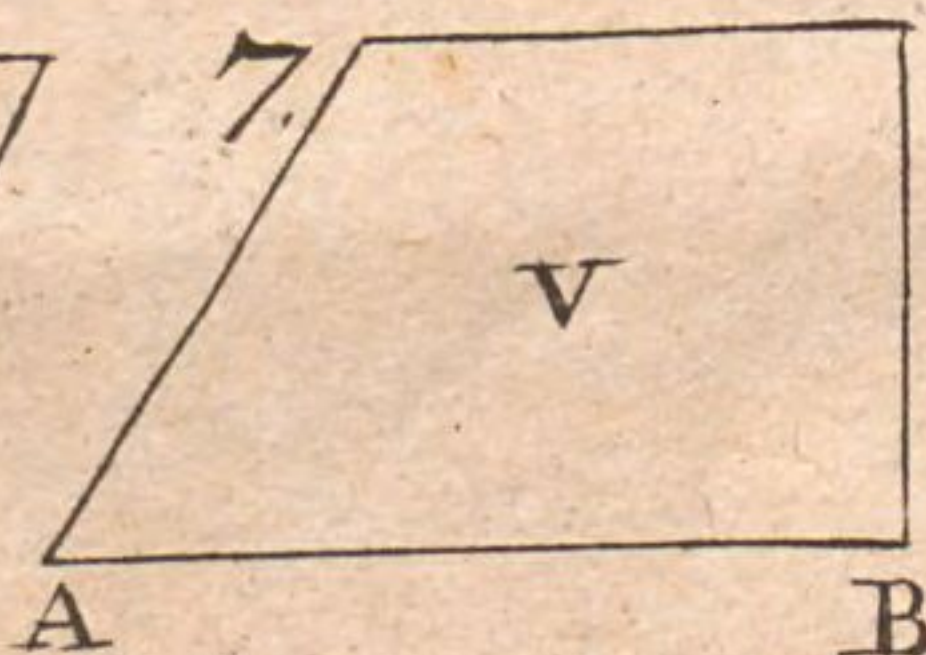
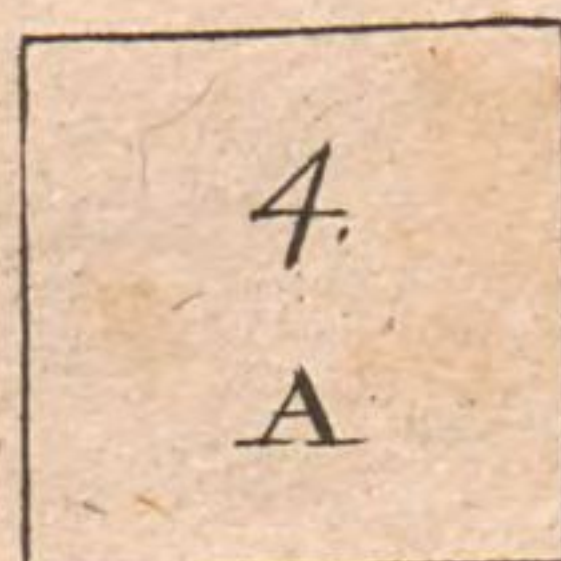
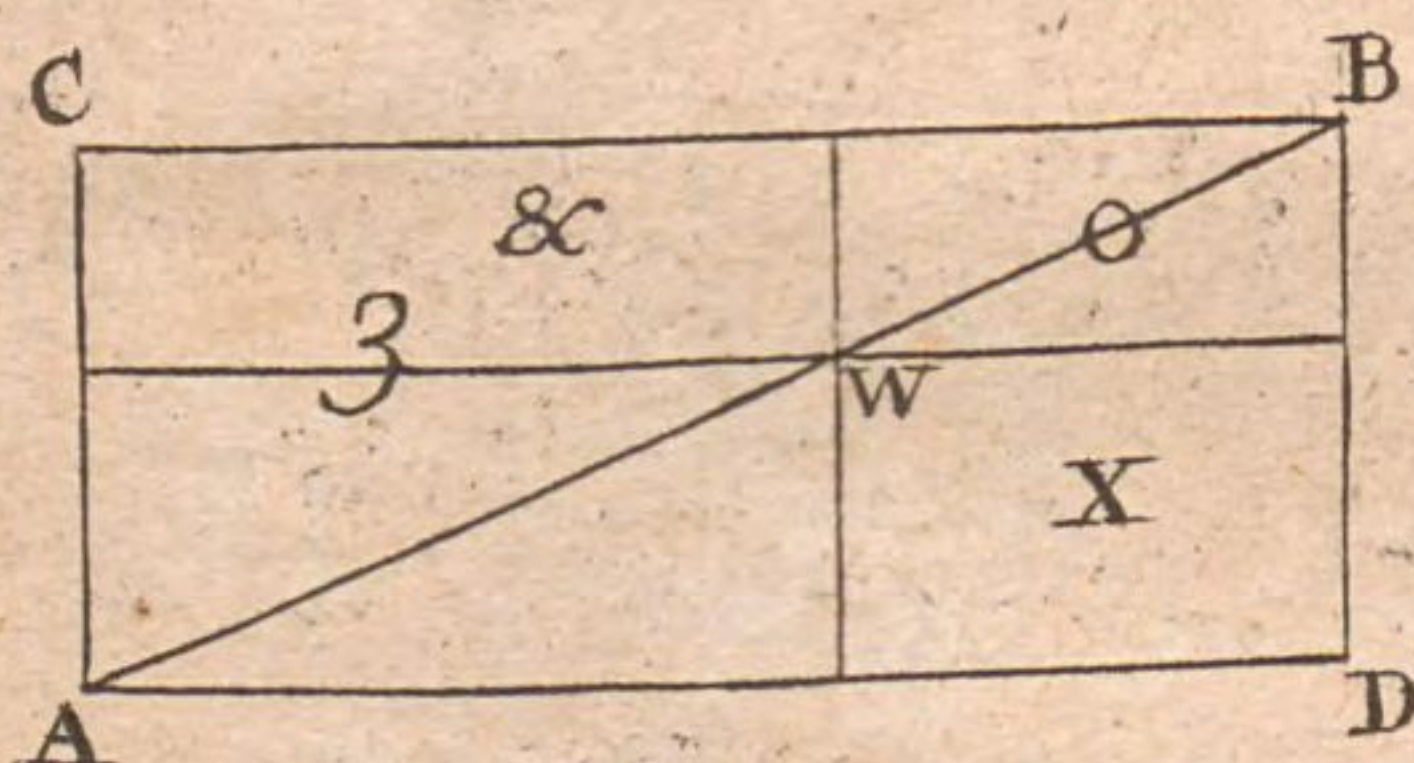
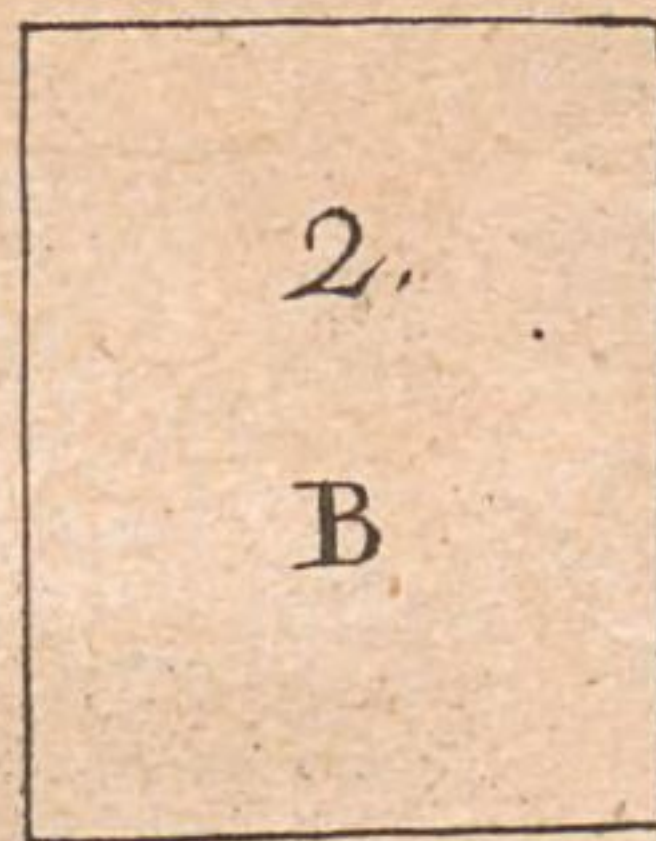
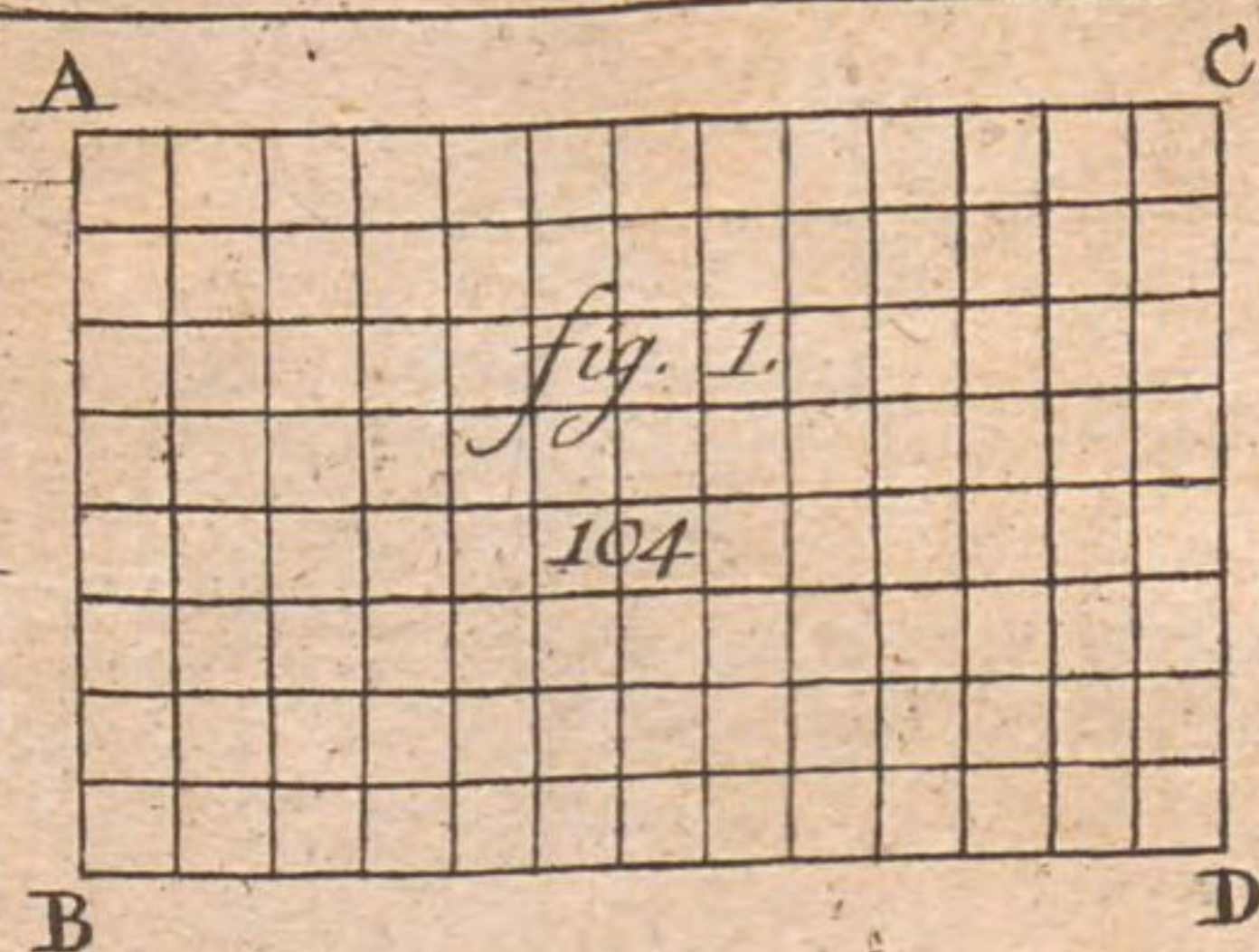
E L E M E N S D E G E O M E T R I E, O U D E L A M E S U R E D U C O R P S.

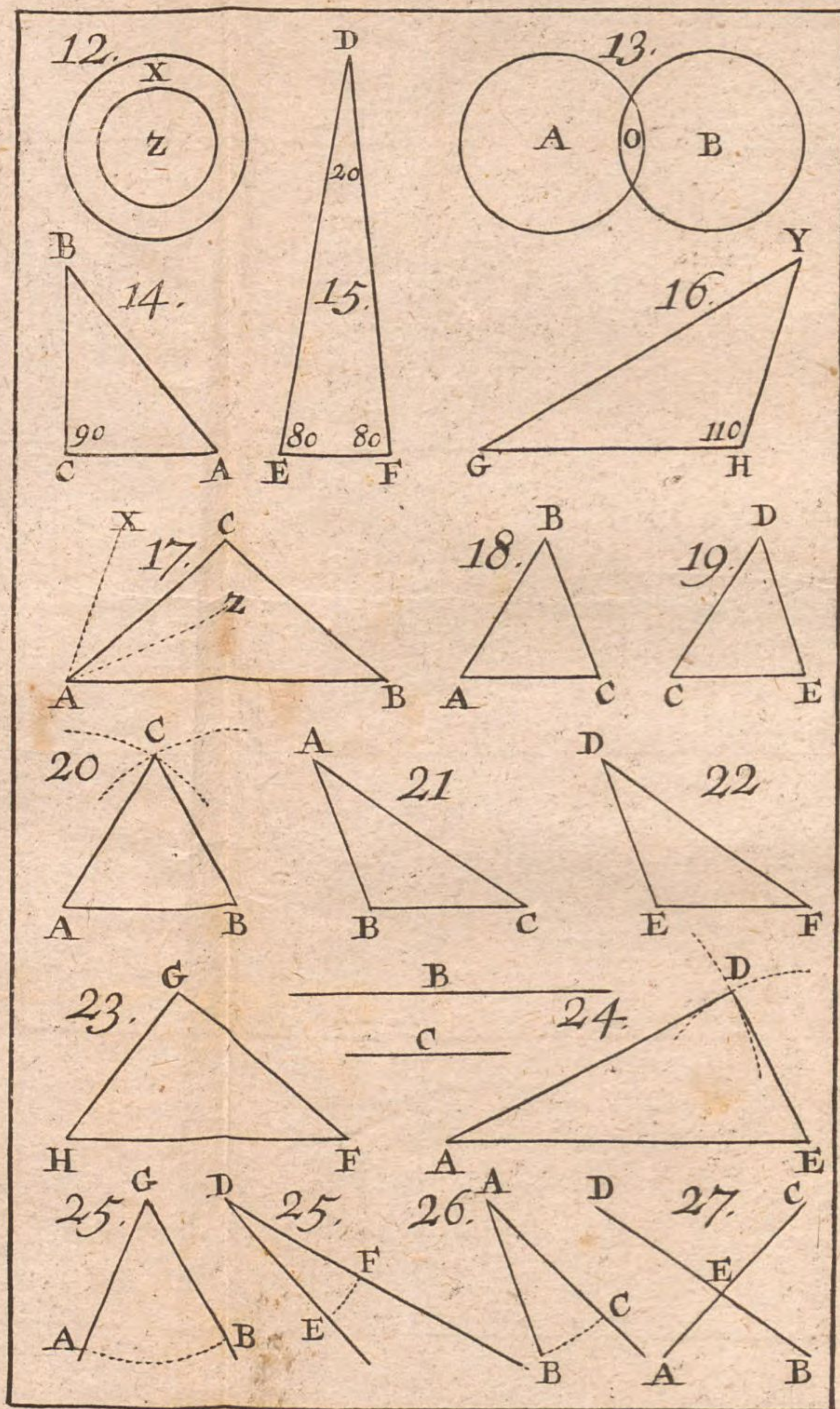
LIVRE PREMIER.



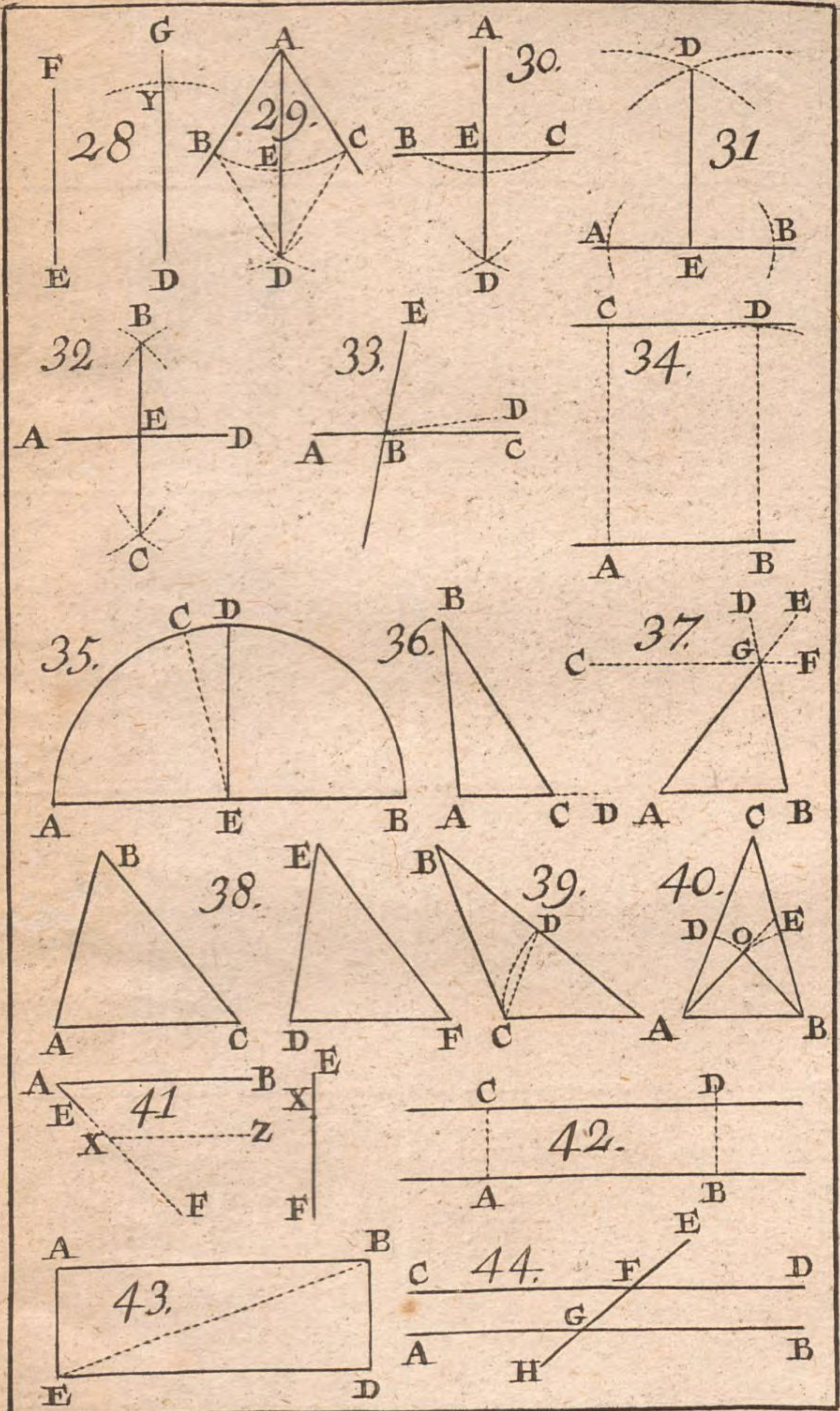
Le dessein d'Euclide dans ce Livre est de nous enseigner les premiers principes de la Géométrie, & afin que le tout soit dans un ordre naturel, il commence par nous en expliquer les termes les plus ordinaires, & ayant poursuivi les définitions, il veut qu'on lui accorde quelques suppositions, sans qu'il soit con-

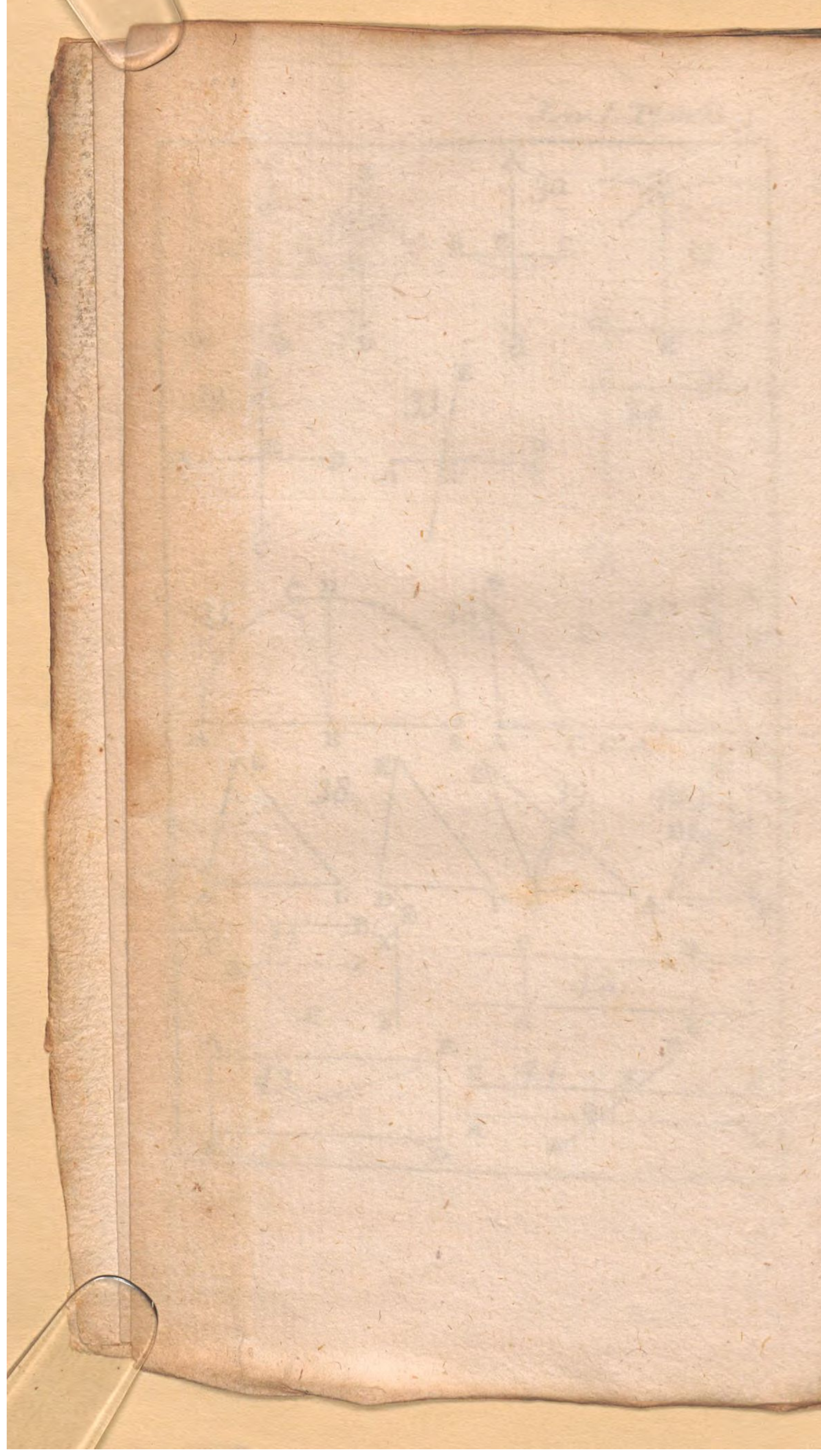
Elemens de Geom. Liv. I. Planche 1.

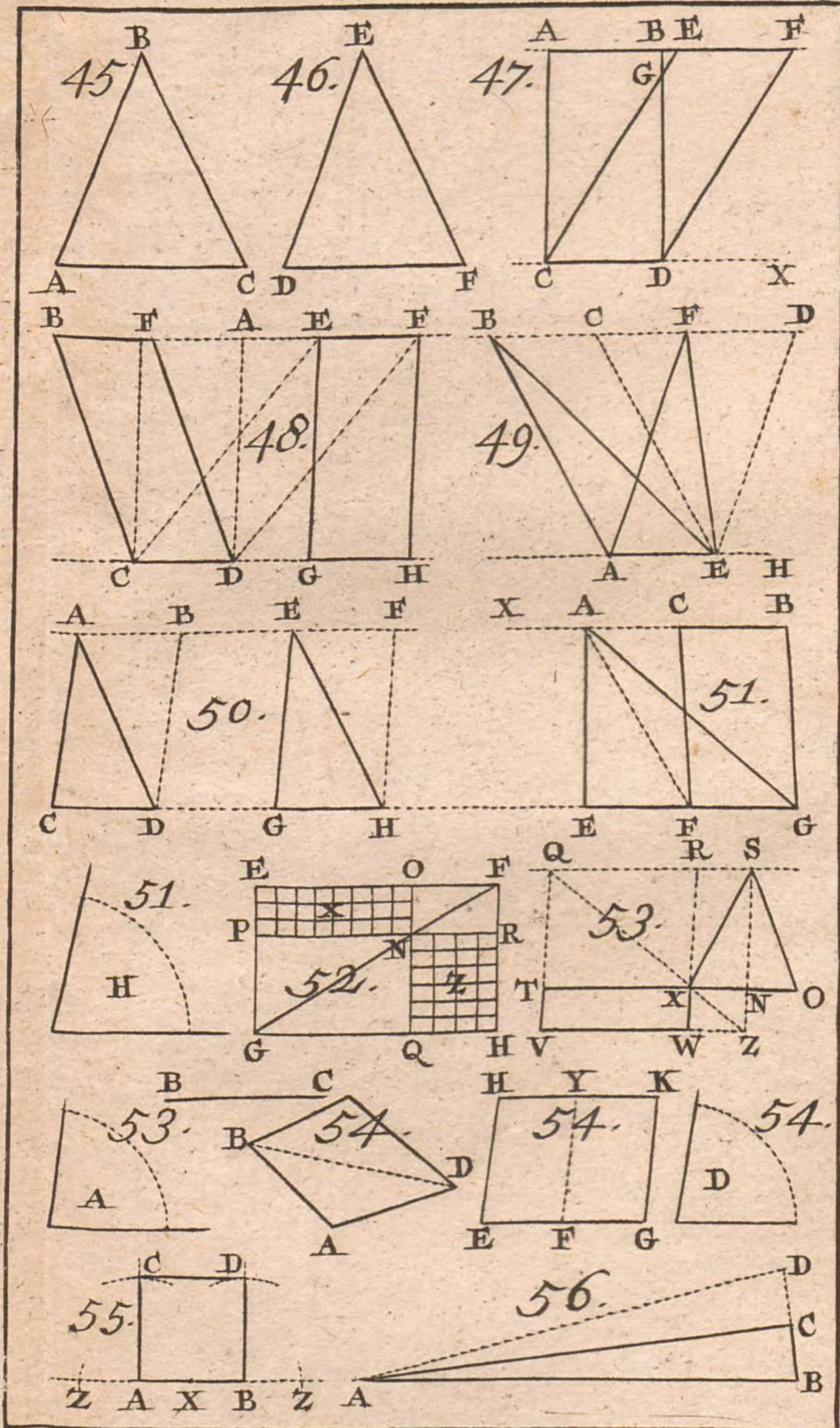




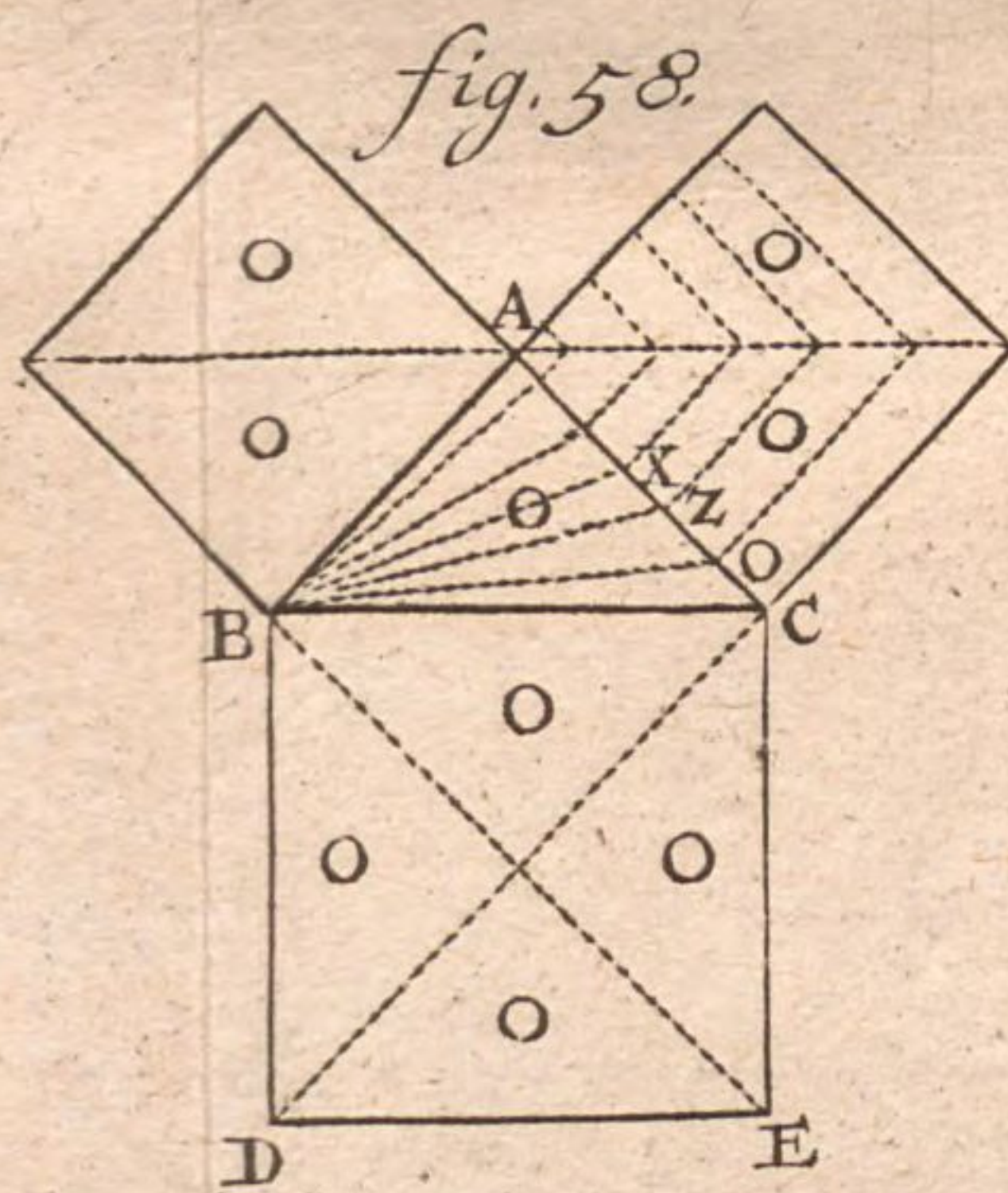
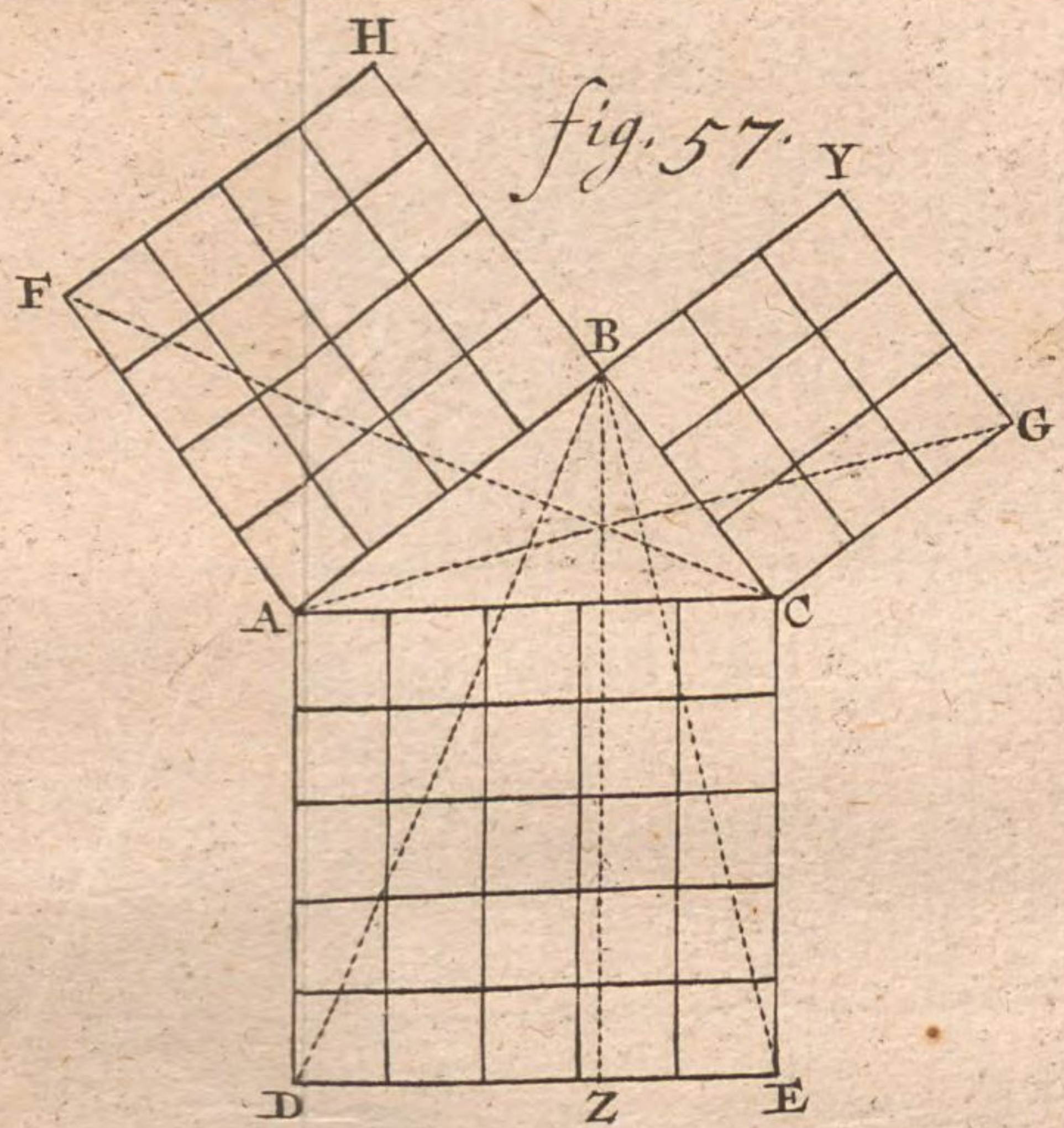












contraint d'en démontrer la possibilité.

Ensuite nous ayant proposé quelques maximes, qui naturellement nous doivent être connues, il traite des Lignes & des Angles : après il nous enseigne la manière de diviser toute Ligne donnée en deux également, comme aussi d'abaisser d'un Point donné une Perpendiculaire à une Ligne, & d'un Point donné dans une Ligne d'élever une Perpendiculaire.

De plus il nous montre les propriétés du Triangle comme aussi celles des Lignes Paralleles; & enfin il passe aux Parallelogrammes, nous enseignant la manière de changer toute Figure Rectiligne en une plus régulière.

Et sur la fin il nous démontre cette célèbre proposition de Pythagore, qui porte, que le Quarré du côté opposé à l'Angle droit de quelque Triangle Rectiligne Rectangle que ce soit, est égal à la somme des Quarrés des deux autres côtés.

Toute la Géométrie derive des trois principes suivans, lesquels sont assés généraux;

A sçavoir des Definitions, des Demandes & des Axiomes.

Ce que c'est que Définition, Demande & Axiome.

La Définition est une proposition qui donne une notion distincte de la chose qu'on veut qu'un mot signifie.

4 E L E M E N S D E

La Demande est une proposition qu'on doit recevoir pour incontestable, lorsqu'on y a fait attention.

L'Axiome est une verité manifeste, c'est-à-dire aussi évidente, qu'un & deux pris ensemble font trois.

Explication d'autres termes dont on se servira.

Le Theoreme est une proposition dans laquelle on considere la verité d'une chose, sans qu'il soit besoin de descendre à la pratique &c.

Le Probleme est une proposition dans laquelle il s'agit de faire quelque preparation & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

Le Lemme est une proposition, qui n'est au lieu où elle se trouve, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Le Corollaire est une suite, ou consequence tirée d'une proposition démontrée. &c.

Le Scholie est une remarque ou annotation passagere faite sur quelque proposition démontrée.





DEFINITIONS

Premiere Définition,

DU POINT.

Selon les Phisiciens le Point est le moindre objet de la vûë ; mais les Mathematiciens rejettent cette définition, & disent que le Point n'est qu'imaginaire, & par consequent indivisible, d'où il suit,

I I.

Que la Ligne doit être considérée sans largeur & sans épaisseur, puisqu'on peut la concevoir produite d'un Point se mouvant le long d'un Espace.

I I I.

Les extremités d'une Ligne sont deux Points; c'est ce qui est évident, puisque par la précédente la Ligne n'est composée que de Points.

I V.

La Ligne droite est la plus courtè de toutes celles qu'on puisse mener entre deux Points.

DE LA SURFACE.

Surface, Superficie ou Aire est un Espace compris seulement sous longueur & largeur, laquelle par conséquent n'a aucune épaisseur; car comme on vient de reconnoître, que la Ligne est produite par le mouvement du Point, de même la Surface peut être considérée produite par le mouvement de la Ligne; or la Ligne étant composée d'une infinité de Points, il s'ensuit évidemment, que la Surface l'est d'une infinité de Lignes. D'où il est aisé de conclure: (par les deux premières Définitions:) qu'elle ne peut avoir d'épaisseur.

V I.

Planche I. 1 figure. La Surface Plane où Droite peut-être considérée faite de la multiplication d'une longueur par une largeur; car par exemple, si la Ligne AB est de 8. Points & la Ligne AC de 13. il est évident que (multipliant AB par AC , c'est-à-dire, 8. par 13.) le produit 104. est l'Aire du Rectangle $ABCD$, ou que ce produit est le nombre des Points qui composent la Surface $ABCD$; puisque l'on peut prendre qu'elle quantité on veut pour un Point Mathématique, pourvu que l'on ne le sous-divise pas.

VII.

L'Angle Plan est un Espace indéterminé, compris entre deux lignes droites quelconques BA , CA , qui se rencontrent en un Point, comme A , & déterminé par la partie d'une circonference de Cercle BC décrite de sa Pointe A , qui est ce Point de rencontre, ou (maintenant) extrémité commune de ces deux lignes BA , CA *plan-
che 2.
26. fig.*

VIII.

On se sert de trois Lettres pour nommer, un Angle la lettre du milieu en marque la Pointe, ainsi l'Angle BAC est celui qui est compris entre les deux lignes AB , AC . *même
figure.*

IX.

La grandeur d'un Angle n'est pas déterminée par la Longueur de ses côtes, mais bien par son ouverture, quoique les côtes de l'Angle D soient plus longs que ceux de l'Angle G , il ne s'en suit pas pour cela que l'Angle D soit plus grand que l'Angle G ; car si d'une même ouverture de Compas on décrit des Pointes D , G les Arcs de Cercles EF , AB , on connoîtra aisément par Définition. 7. que l'Angle G , est plus grand que l'Angle D , si l'Arc AB , est plus grand que l'Arc EF &c. *25. fig.*

X.

*Plan-
che I.
fig. 10.*

D'où il suit, que c'est par le Cercle qu'on connoît la grandeur d'un Angle: car si l'on veut connoître la grandeur de l'Angle $A D C$, qu'on decrive de sa Pointe D , le demi-Cercle $B A C$, après avoir continué $C D$, vers B . Remarqués qu'ordinairement on divise la circonference du Cercle en 360. parties égales qu'on nomme Degrez, d'où il est aisé de conclure par Définition 7. que (si l'Arc $A C$, contient plus ou moins de 90. degres) l'Angle $A D C$ est aussi plus ou moins grand de 90. degres.

X I.

*même
figure.*

La ligne $A D$ élevée du milieu D de la ligne $B C$ sera dite Perpendiculaire à cette ligne $B C$, si elle ne panche non plus vers B que vers C ; que si elle s'inclinoit plus vers B que vers C , en ce cas elle s'appellerait oblique ou inclinée.

X I I.

*même
figure.*

La Perpendiculaire $A D$, qui divise en deux également le demi Cercle $B A C$ produit deux Angles $A D B$, $A D C$ qui sont appelez droits & valent chacun 90. degres à cause que l'Arc $B E A C$ en vaut 180. par Déf. 10.

X I I I.

*même
fig.*

L'Angle $E D C$ plus grand que le Droit
 $A D C$

GEOMETRIE. LIV. I. 9

ADC est apellé Obtus & l'Angle EDB Aigü, parcequ'il est moindre que le Droit BDA.

X I V.

Le Cercle est une figure Plane, terminée d'une seule ligne apellée circonference où Periferie dont les Points sont également éloignez de celui du milieu du Cercle qui en fait le Centre. *fig. 11.*

Si par la pensée on fait tourner la ligne NA autour du point immobile N, en sorte que l'extrémité N de cette ligne ne quitte pas ce point N, il est évident qu'elle décrira par sa circonvolution entière, la figure ABCD qu'on vient d'appeller Cercle.

X V.

La figure ABCD est un Cercle; toutes les lignes qui ont leurs extrémités à sa circonference, & qui passent par son Centre. N, s'appellent Diametres qui sont égaux entr'eux, par ce que leurs moitiés ou rayons NB, ND, NC, NA, le sont aussi par la précédente. *fig. 11.*

X V I.

Les extrémités des Figures Rectilignes sont des lignes Droites, dont elles sont terminées. C'est ce qui est évident par Défin. 5.

X V I I.

Le Triangle est la plus simple & la première

A 5

Plan-

che 2.

14. fig.

10 E L E M E N S D E

- mière de toutes les Figures Rectilignes. Il
 20. *fig.* est appelé Triangle Equilateral, si ses trois
 15. *fig.* côtez sont égaux entr'eux ; Isocele, s'il
 16. *fig.* n'en à que deux ; & Escalene s'ils sont tous
 14. *fig.* trois inégaux. Nous dirons aussi que le
 15. *fig.* Triangle qui à un Angle Droit est appelé
 16. *fig.* Triangle Rectangle ; & celui qui à tous ses
 Angles Aigus, est appelé Triangle Acutan-
 gle ou Oxigone ; & qu'enfin celui qui à un
 de ses Angles Obtus, est appelé Obtus-An-
 gle ou Ambligone.

X V I I I.

- Plan-* Voyez-la Définition 24. Le Quarré est une
che 1. figure Rectiligne terminée par quatre côtez
 4. *fig.* Parallels & Egaux, qui par leurs Intersec-
 tions comprennent quatre Angles drois.

X I X.

2. *fig.* On distingue le Quarré long ou Rectan-
 gle d'avec le Quarré, en ce que le Rec-
 tangle n'a que ses côtez opposez égaux.

X X.

5. *fig.* Le Rombe ou Losange est un Quarré
 alongé qui à ses quatre côtez Parallels &
 Egaux, comme aussi ses Angles opposez.

X X I.

6. *fig.* On distingue le Romboïde d'avec le Rom-
 be, en ce que le Romboïde n'a que ses
 côtez opposez égaux.

X X I I.

XXII.

Toute Figure Quadrilatere ou de quatre 7. *fig.*
côtés qui en a deux opposés Parallels, s'a-
pelle Trapeze, & Trapezoïde si elle n'en a 9. *fig.*
aucun.

XXIII.

On appelle communément Base d'une Fi-
gure le côté mis horisontalement ainsi les 9. & 7.
côtés CD, AB seront les Bases des Figures *figures.*
V, W.

XXIV.

Deux Lignes sont dites Paralleles, lors- 8. *fig.*
qu'étant continuées elles ne se rencontrent
jamais ; d'où il suit que si entre les deux
Paralleles AB, CD il y a une infinité de
Lignes Perpendiculaires, elles seront toutes
égales, puisque par la Défin. 4, elles sont
les plus courtes qu'on puisse mener d'un
Point d'une Parallele à son opposé de l'au-
tre &c.

XXV.

La Ligne AB qui partage la Figure 3. *fig.*
ABCD, passant par les Angles B, A, s'a-
pelle Diagonale, & les deux Figures &, X
dont la Pointe commune W, est dans
cette Diagonale, s'appellent Supplemens où
Complemens & la Figure & OX, Gno-
mon, comme aussi la Figure CAWD, dans
la

12 E L E M E N S D E
la quelle la Figure O n'est pas comprise.

X X V I.

La Surface extérieure d'une Voute est
apellée Convexe, & l'intérieure Concave.
&c.

X X V I I.

Plan-
che 2.
13. fig.

On dit qu'une chose est commune lors-
qu'elle appartient à plusieurs quantités; d'où
il suit que la Figure O est commune aux
deux Figures O A, B O, parce qu'elle fait
partie de l'une, & partie de l'autre.



D E M A N D E S

Ou plutôt Propositions évidentes.

CAR Euclide ne se servant dans ce Trai-
té que de la Ligne Droite & de la
Circulaire, dont la Description est si facile,
on ne peut autrement que lui accorder,

I.

Que d'un Point donné à quel Point que
ce soit, on peut tirer ou s'imaginer tirée,
une Ligne Droite.

I I.

I I.

Qu'on peut continuer une Ligne Droite déjà commencée.

I I I.

Que de tout Centre & de toute ouverture de Compas on peut décrire, où s'imaginer décrit, quel Cercle que ce soit.

A X I O M E S

On Véritez naturellement connus.

I.

LE tout est plus grand que sa partie; car il est très évident que si par exemple d'un bâton de 6. pieds on s'en imagine un retranché de 2. pieds, celui de 6. pieds qui est le tout sera plus grand que celui de 2. pieds qui est la partie; &c. d'où il suit.

I I.

Que toutes les parties prises ensemble sont égales au tout &c.

I I I.

Les grandeurs égales à une même grandeur,

14 E L E M E N S D E

deur, sont égales entr'elles, car si A 4. est égal à B 4, il est de nécessité que C soit aussi 4. pour qu'il soit égal à B 4. d'où il suit.

I V.

Que si à choses égales on en ajoute d'é-gales, les sommes seront égales, car par exemple 4. étant égal à 4, il est évident que si à ces deux 4, 4 on ajoute également, les tous seront encore égaux, d'où il suit.

V.

Que si de choses égales on en ôte d'é-gales, les restes seront égaux; car si des deux grandeurs égales 6-6, on ôte également, les restes seront évidemment égaux.

V I.

Si à des quantités inégales on en ajoute d'é-gales les sommes seront inégales; car si à deux grandeurs comme 7, 9 on ajoute également, les tous seront inégaux; d'où il suit.

V I I.

Que si des grandeurs inégales, on en ôte d'é-gales, les restes seront inégaux &c.

V I I I.

Les quantités qui conviennent ensemble, sont égales entr'elles. c'est-à-dire en tous

tous sens; enforte que le sens de cet Axiome porte, que si deux Lignes, par exemple, où deux Surfaces étant posées l'une sur l'autre, peuvent s'ajuster de manière; que toutes les parties de l'une occupent ou couvrent toutes les parties de l'autre: ces deux Lignes ou ces deux Surfaces sont égales en tous sens; d'où on conclut aisément par Défin. 4, que si entre deux Points on tire tant de Lignes Droites que l'on voudra, elles seront parfaitement égales, & que si d'un même Centre on décrit d'une même ouverture de Compas tant de Cercles que l'on voudra ils seront parfaitement égaux, il en est de même de toutes autres choses semblables.

I X.

Les quantités qui sont doubles, Triples où Quadruples d'une même quantité, sont égales. C'est une suite de l'Axiome 3.

REMARQUES.

I.

Dans les marges de cet ouvrage on trouvera des nombres qui citent, le premier est celui de la Proposition, & le second indique le Livre; enforte que par 10-2. je veux dire par la Proposition dixième du Livre second.

Si on ne trouve qu'un nombre, il indique la Proposition du Livre, qu'on explique.



PROPOSITION I.

P R O B L E M E.

Plan-
che 2.
20 fig.

D Ecrire sur la Ligne donnée AB un Triangle Equilateral.

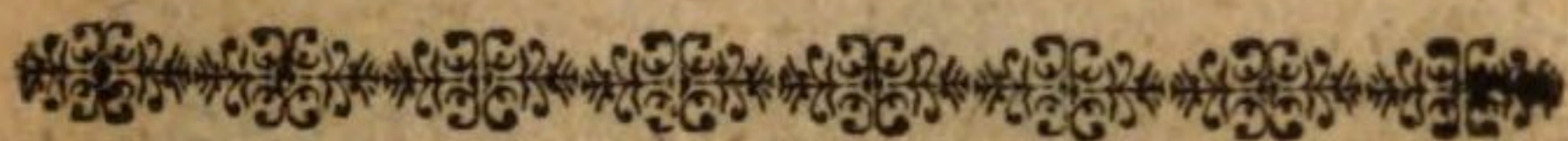
P R E P A R A T I O N.

De l'ouverture de Compas AB ; décrits des extrémités, A , B deux Arcs de Cercles, ensuite tirés à la section C . les Lignes AC , BC qui termineront le Triangle demandé.

D E M O N S T R A T I O N.

Car les Lignes AC , CB , AB étant égales entr'elles par Défin. 15. (à cause qu'elles sont les rayons de Cercles égaux décrit de la même ouverture AB ; il s'ensuit par Défin. 17. que le Triangle ABC est Equilateral; ce qu'il falloit faire & démontrer.

P R O.



PROPOSITION II.

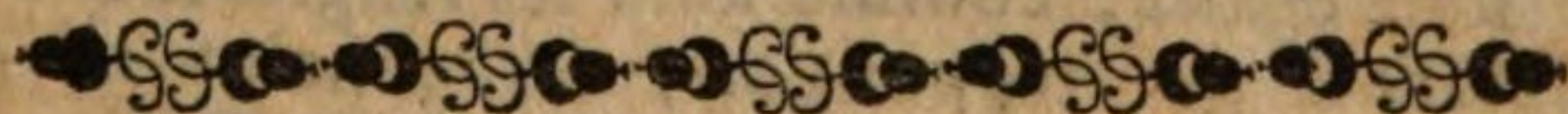
PROBLEME.

Tirer du Point donné D, une Ligne
égale à la donnée EF.

*Plan-
che 3.
28 fig.*

PREPARATION

De l'ouverture EF décrivés de ce Point
donné D l'Arc de Cercle Y, ensuite tirés
la Droite DY, qui par la précédente sera
égale à la donnée EF &c.



PROPOSITION III.

PROBLEME

Retrancher de la Ligne donnée DG ^{28 fig}
une partie égale à la plus petite EF.

PREPARATION

Faites par la précédente DY égale à EF
&c.

B

PRO-



PROPOSITION IV.

T H E O R E M E

*Plan-
che 2.
18 &
19 fig.* SI les deux Triangles ABC CDE ont les côtez AB , DC égaux, comme aussi les côtez BC , DE & les Angles B , D , compris entre ces côtez, je dis qu'ils sont égaux en tous sens.

DEMONSTRATION

Parceque les côtez AB , CD . BC , DE sont égaux, comme aussi les Angles ABC CDE par supposition, on conclut aisément par Axiome 8. que les trois Pointes du Triangle ABC doivent tomber sur les trois Pointes du Triangle DCE , comme aussi la bête CE sur la bête AC par Déf. 4, & que par conséquent ces Triangles sont égaux en tous sens ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION V.

THEOREME

SI les Angles à la b  se du Triangle ABC 17. *fig.* sont égaux, je dis qu'il est isoscele.

DEMONSTRATION

Car les deux Points ou extremités de la b  se AB doivent faire, par leurs écoulemens autant de chemin l'un quel'autre pour se rencontrer en C , à cause qu'ils s'inclinent sous Angles égaux; & d'autant plus, que si quelconque de ces Points prenoit son chemin vers Z ou vers X , il detruiroit l'égalité des Angles ce qui feroit, contre la supposition donc &c.

COROLLAIRES

I.

D'où il suit que si le Triangle ABC est *même* Isoscele, les Angles à la b  se sont égaux en-*fig.* tr'eux,

Car on vient de reconnoître que pour que les côtés AC , BC soient égaux, il est de nécessité que les Angles à la b  se le soient aussi ce qu'il falloit démontrer.

B 2

II.

D'où il suit que les Angles du Triangle Equilateral sont égaux entr'eux puisque de quel sens on le prenne, il est Ifofcele par Défin. 17.



PROPOSITION VI.

T H E O R E M E.

DEux côtés quelconques pris ensemble du Triangle FGH sont plus grands que le troisiéme.
 23. *fig.* C'est ce qui est très évident par Définition 4.

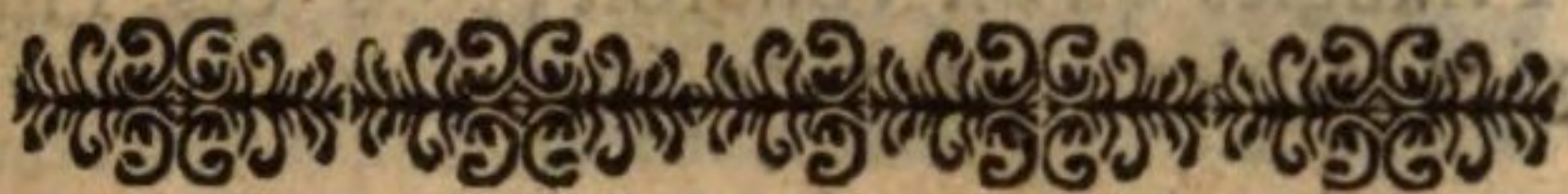
COROLLAIRES

I.

D'où il suit que pour décrire quelque Triangle que ce soit, il faut que deux Lignes données soient prises ensemble plus grandes que la troisiéme.

I I.

Et que la Ligne Droite est la plus courte de toutes les Lignes qu'on puisse tirer entre deux Points, P R O-



PROPOSITION VII.

PROBLEME.

D Ecrire un Triangle des trois Lignes
données A E, B, C. 24. fig.

PREPARATION.

De l'extrémité A de la Ligne A E décrivés de l'Ouverture de la Ligne B l'Arc D, & de son autre extrémité E décrivés de l'Ouverture de la Ligne C l'Arc D, ensuite tirés des extrémités A, E à la Section D les Droites A D, E D qui termineront le Triangle demandé.

DEMONSTRATION.

Par ce que la Ligne A D est par 2. égale à la Ligne B comme aussi E D à la Ligne C, il s'ensuit qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire. &c.

LEMME

Il suit évidemment que si des trois Lignes A E, B, C, on décrivoit autant de
B 3 Triangles

22 · E L E M E N S D E

Triangles qu'on voudroit, tous ces Triangles seroient égaux en tous sens.



PROPOSITION VIII.

T H E O R E M E.

Plan-
che 2.
21 &
22. fig.

SI deux Triangles ABC , DEF ont les côtés égaux chacun à chacun, je dis que les Angles compris entre ces côtés égaux sont aussi égaux.

DEMONSTRATION.

Car les côtez AB , ED . BC , EF . AC , DF étant égaux par supposition, il s'ensuit par le Lemme précédent que ces Triangles sont égaux en tout sens, & que par conséquent les Angles compris entre leurs côtez égaux le sont aussi; ce qu'il falloit démontrer.



PRO-



PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Diviser l'Angle BAC en deux également. *Planche 3. 29. fig.*

PREPARATION.

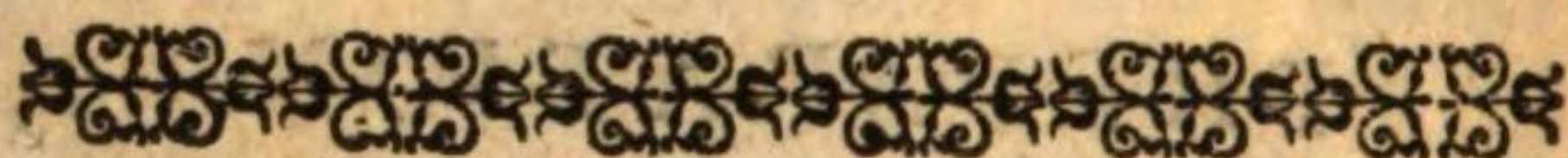
Du Point A décrivés l'Arc de Cercle BC & sans branler le Compas décrivés des Points ou Sections B, C les Arcs D , ensuite tirés de l'extrémité A à la Section D la Ligne AD qui divisera l'Angle proposé en deux également.

DEMONSTRATION.

Car les côtés BA, AC, BD, DC sont par 2. égaux entr'eux, par conséquent AD étant commun, il s'ensuit par la précédente que les Triangles ABD, ACD sont égaux en tous sens, & par 8. que l'Angle BAD est égal à l'Angle DAC , & qu'enfin l'Angle BAC est divisé comme on avoit proposé de le faire; ce qu'il falloit démontrer.

Autre DEMONSTRATION.

Parce que les Points A, D sont également éloignés des Points B, C par Défin. du Cercle, & que par Défin. 4. le Point E l'est aussi de ces mêmes Points, on conclut évidemment de là que le Point E est le milieu de l'Arc BC, & par Défin. 9. que les Angles BAE, EAC, sont égaux; ce qui suffit.



PROPOSITION X.

P R O B L E M E.

32. fig. **D**iviser la Ligne AD en deux parties égales.

PREPARATION.

Décrivés des extrémités A, D les quatre Arcs B, C & menés par leurs Sections la Droite BC, qui divisera la Ligne proposée en deux également.

DEMONSTRATION.

Parce que par Défin. du Cercle les Points B, C sont également éloignés des extrémités A, D, & que par Défin. 4. le Point E l'est aussi de ces mêmes extrémités, il s'ensuit que ce Point E est le milieu de la Ligne AD, & que par conséquent cette Ligne AD est divisée en deux également en E; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XI.

PROBLEME.

DU Point donné E dans la Ligne AB, Plan-
élever une Perpendiculaire à cette Li- che 3.
gne. 31 fig.

PREPARATION.

De ce Point donné coupés par 2. deux Lignes égales EB, EA & ensuite décrits des Sections A, B les Arcs D, puis de ce Point E, tirés à la Section D la Ligne ED qui sera la Perpendiculaire demandée.

DEMONSTRATION.

Car le Point D étant par Défin. du Cercle également éloigné des Points A, B, il s'enfuit évidemment par Défin. 11. que la Ligne ED est Perpendiculaire à AB à cause des Lignes EB, EA égales entr'elles par constr.; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XII.

P R O B L E M E.

DU Point A tirer une Perpendiculaire à la Ligne BC.

PREPARATION.

30. *fig.* De A comme Centre décrivés l'Arc BC & ensuite des Sections B, C décrivés de la même Ouverture les Arcs D, puis du Point A tirés à la Section D la Droite AD, dont la partie AE sera Perpendiculaire à cette Ligne BC, comme il est évident par les raisons précédentes.

P R O.



PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

LA Ligne DE abaissée Perpendiculaire-^{35. fig.}
ment à AB comprennent avec cette Li-
gne AB deux Angles AED; DEB qui
par Défin. 12, valent deux Droits.

COROLLAIRES.

I.

Il est évident que si la Ligne CE étoit
Oblique à AB, que les Angles AEC,
CEB seroient toujours égaux à deux droits,
par Axiome 2.

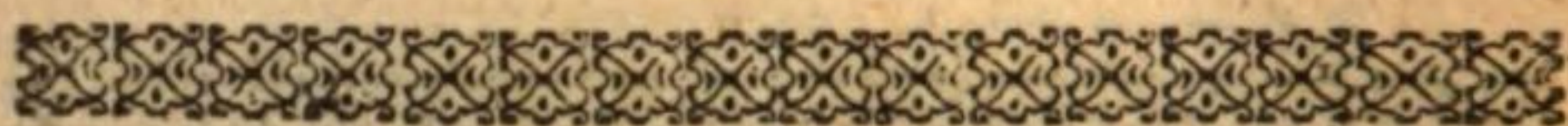
II.

D'où il s'ensuit que si la Ligne DE, en
tombant sur AB fait l'Angle DEB droit ^{même}
l'Angle DEA l'est aussi, ^{figure.}

III.

Et que si l'Angle CEB est Obtus l'autre
CEA est Aigü.

PRO-



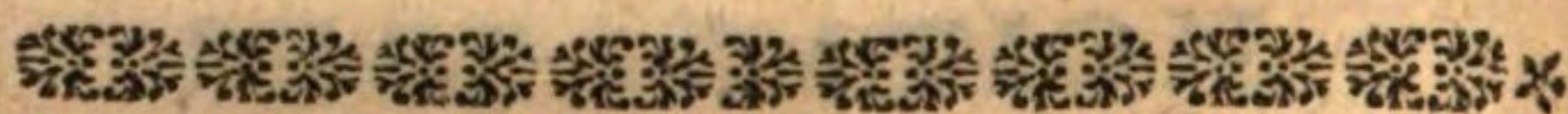
PROPOSITION XIV.

T H E O R E M E.

33. *fig.* SI les Lignes AB , BC , se rencontrent au Point B , de la Ligne BE , de manière que les Angles ABE , $EB C$ valent deux droits, je dis que les Lignes AB , BC composent une Ligne Droite AC .

DEMONSTRATION.

Car si on veut que ce soient AB , BD on connoîtra par la précéd. que les Angles ABE , EBD valent deux droits; ce qui ne peut-être à cause que les Angles ABE , $EB C$ en valent autant par *supp.* donc &c.



PROPOSITION XV.

T H E O R E M E.

*Plan-
che 2.
27 fig.* SI Les deux Lignes Droites AC , DB s'entre-coupent, je dis que les Angles opposés au sommet DEA , CEB sont égaux entr'eux.

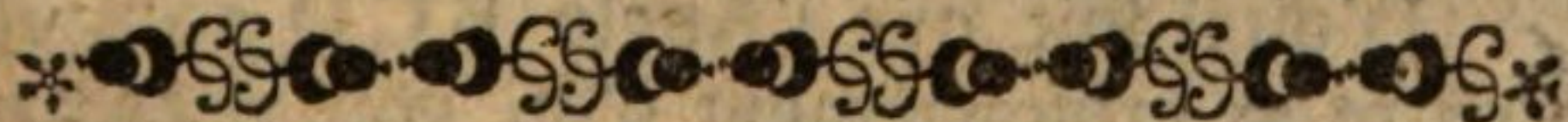
DE

DEMONSTRATION

Car les Angles DEC , CEB valent deux droits par le Corrol. 1. de la prop. 13. comme aussi les Angles DEC , DEA , & parce que l'Angle DEC est commun, on connoît aisément par Axiome 5. que l'Angle DEA est égal à son opposé CEB comme aussi par les mêmes raisons l'opposé AEB à l'opposé DEC ce qu'il falloit démontrer.

L E M M E.

Pour tirer une Parallele à la Ligne AB , *plan-* il est évident qu'il ne s'agit que d'élever *che 3.* par 11. deux Perpendiculaires à cette Droite *42 fig.* AB & en retrancher deux parties égales & tirer par les Sections, la Droite CD qui par 24. Définition. est Parallele à AB &c.



PROPOSITION XVI.

T H E O R E M E.

L Es trois Angles pris ensemble d'un Triangle comme AGB , sont égaux à deux Droits.

DE-

DEMONSTRATION.

Car si vous prolongés deux de ses côtés comme AG , BG vous connoîtrez évidemment, en tirant par le Point G la Droite CGF Parallelement au troisieme côté AB , que les Angles EGF , CGD sont égaux aux Angles A , B à cause que les Droites GF , AB . CG , AB sont également inclinées aux Droites EA , DB , & par propofit. 15. que les opposés AGB , DGE sont égaux & par 13. que les trois CGD , DGE , EGF valent deux Droits, comme auffi par consequent les trois Angles du Triangle AGB ; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE 3.

I.

36. *fig.* D'où il fuit que l'Angle BCD compris entre le prolongement d'un côté quelconque AC d'un Triangle comme ABC & le côté BC , est plus grand qu'aucun des deux Angles A ou B opposés à l'Angle C .

Car les deux ACB , BCD étant égaux à deux Droits, auffi bien que les trois de ce Triangle par preced., il s'ensuit par l'Axiome 5. qu'ôtant le commun ACB le restant BCD , est égal aux deux A , B & que par consequent cet Angle BCD est plus grand que l'Angle A où que l'Angle B , ce qu'il falloit démontrer. II.

I I.

Et que si l'un des Angles d'un Triangle est Droit, les deux autres sont Aigus & pris ensemble égaux à un Droit.

I I I.

Et qu'enfin si l'un est Droit, il est égal aux deux autres pris ensemble.

I V.

Et que si la grandeur de l'un est connue, la grandeur des deux autres pris ensemble l'est aussi.

V.

Et que si deux Angles; d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle chacun à chacun, le troisième Angle de l'un est aussi égal au troisième Angle de l'autre,

V I.

Et que chaque Angle du Triangle Equilateral est de 60. degrés, tiers de 180.

V I I.

Et qu'enfin deux Angles pris ensemble de quelque Triangle Rectiligne que ce soit, sont moindres que deux Droits.

PRO-



PROPOSITION XVII.

T H E O R E M E.

Plan-
che 3.
39. fig.

DAns tout Triangle le plus grand côté est opposé au plus grand Angle.

En sorte que si BA est le plus grand côté du Triangle ABC, je dis que l'Angle BCA opposé à ce côté, est aussi le plus grand de ce Triangle.

PREPARATION.

Coupés par 3. AD. égale à AC, tirés la Ligne CD.

DEMONSTRATION.

Par ce que les côtez AC AD sont égaux par constr. il s'ensuit par Défin. 17. que le Triangle ACD est Isoscele, & par le Coroll. 1. de la Prop. 5. que les Angles CDA, DCA sont égaux entr'eux, & par Axiome 1. que l'Angle BCA est plus grand que l'Angle DCA ou que son égal CDA, qui étant par le Coroll. 1. de la Prop. 16, plus grand que l'Angle CBD, prouve que BCA est aussi plus grand que cet Angle CBD ou que
l'An-

l'Angle CAD par les mêmes raisons; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

D'où il suit évidemment que le plus grand Angle de quelque Triangle que ce soit est opposé au plus grand côté.

II.

Et que, si les Triangles X, Z ont les 38. *fig.*
côtés BA, ED égaux, comme aussi les
côtés BC, EF, la bête AC, sera plus gran-
de que la bête DF, si l'Angle B est plus
grand que l'Angle E.

III.

Et qu'enfin, si ces Triangles X, Z ont
les côtés BA, ED égaux comme aussi les
côtés BC, EF, l'Angle B sera plus grand
que l'Angle E, si la bête AC est plus gran-
de que la bête DF.

C

PRO-

PROPOSITION XVIII.

T H E O R E M E.

40. *fig.* **S**I dessus la même bafe AB on décrit les deux Triangles ABC, ABO, je dis que les côtez du plus petit sont moindres que les côtez du plus grand ; mais qu'ils comprennent un Angle plus grand.

DEMONSTRATION.

Car si par 3. on fait les Lignes AD, BE égales aux côtez AO, BO, on connoitra aisément par 6. que la somme de ces côtez est plus petite que la somme des côtez AC, BC ; ce qu'il falloit démontrer.

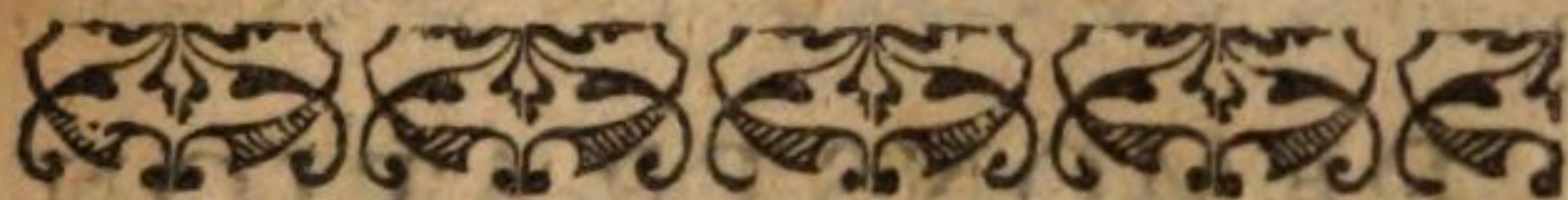
PREPARATION.

Prolongés AO jusqu'en E,

DEMONSTRATION.

Parce que l'Angle AEB est, par le Coroll. 1. de la Prop. 16, plus grand que l'Angle ACB & que l'Angle AOB est plus grand que l'Angle AEB, il s'ensuit que cet Angle AOB est à plus forte raison plus grand que l'An-

l'Angle ACB ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

Faire un Angle égal au donné EAB dans le Point X de la Ligne donnée EF. *Planche 3. 41. fig.*

PREPARATION.

Joignés EF avec EA, en sorte que EA plus EF composent, une Ligne Droite AF, puis tirés du Point donné X par le Lemme de la Prop. 16, la Droite XZ Parallelement à AB, qui par la même comprendra avec XF l'Angle FXZ égal au donné A; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XX.

THEOREME.

SI la bāse AC est égale à la bāse DF & l'Angle A égal à l'Angle D & l'Angle C *Planche 4. 45 & 46 fig.*

C à l'Angle F, je dis que ces Triangles sont égaux en tous sens.

DEMONSTRATION.

Parcequ'on suppose que les côtez AC, DF sont égaux comme aussi les Angles A, D. C, F, on conclut aisément par la Proposition cinquième que, les Points A, D. C, F marchant sous Angles égaux, le Point A fait autant de chemin pour rencontrer le Point C, que D en fait pour rencontrer, F, & que C fait autant de chemin pour rencontrer A que F en fait pour rencontrer D, & qu'enfin ces chemins ou Lignes AB, DE étant égales comme aussi CB, EF, les Triangles ABC, DEF sont par 8, égaux en tous sens; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXI.

T H E O R E M E

*Plan-
che 3.
fig. 44.* SI les deux Paralleles AB, CD, coupent la Droite EH, je dis que les Angles Alternes FGB, CFG sont égaux.
J'ajoute que les Angles GFD, FGB sont égaux à deux Droits.

DE-

DEMONSTRATION

Les Angles oppolez CFG, EFD font, par 15, égaux entr'eux, &, par 16, l'Angle EFD est égal à l'Angle FGB, & par Axiome 3. cet Angle FGB l'est à l'Angle CFG; ce qu'il falloit démontrer.

Puisqu'on démontrera de la même manière que les Alternes FGA, GFD sont aussi égaux.

DEMONSTRATION.

Les Angles EFD, DFG valent deux Droits, par conséquent l'Angle FGB étant égal à l'Angle EFD, il s'ensuit que les Angles FGB, DFG valent aussi deux Droits; ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il suit, que les deux Lignes AB, CD sont Paralleles, si en coupant la Droite EH elles font les Angles Alternes égaux, ou les Angles exterieures ou interieures égaux à deux Droits.

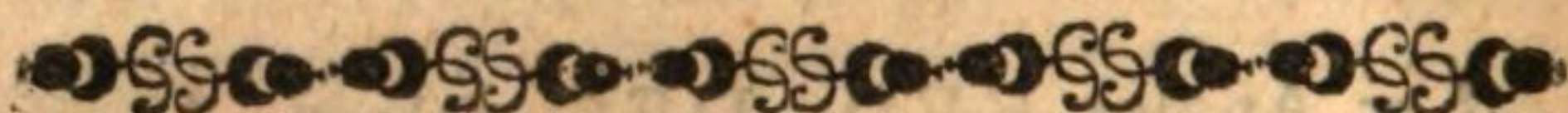




PROPOSITION XXII.

T H E O R E M E.

DEux Lignes Paralleles à une troisieme
sont Paralleles entr'elles
C'est ce qui est très évident en conse-
quence du 3. Axiome.



PROPOSITION XXIII.

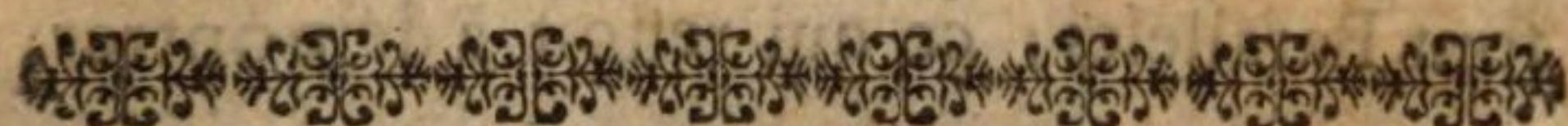
P R O B L E M E

42. fig. **T**irer une Parallele à la Ligne AB par
le Point donné C.

P R E P A R A T I O N

Abaissés par 12. de ce Point C la Per-
pendiculaire CA, & par 11. élevés du Point
B pris à volonté dans la Ligne AB la Per-
pendiculaire BD que vous couperés par 3.
égale à AC, tirés la Droite CD qui par
24. Défin. sera Parallele à AB; ce qu'il fal-
loit faire & démontrer.

P R O-



PROPOSITION XXIV.

THEOREME

SI les Droites AB, CD sont Paralleles & *Plan-*
égales, & joignent les deux CA, BD, *che 3.*
je dis que ces dernières sont aussi Paralleles 43 *fig.*
& égales.

PREPARATION.

Tirés la Diagonale BC.

DEMONSTRATION.

Parce que les Angles Alternes ABC ;
BCD, sont, par 21, égaux entr'eux, com-
me aussi les côtez, CD, AB par Supp. il
s'ensuit par 4. que, CB étant commun, les
Triangles ABC, DBC sont égaux en tout
sens & que par conséquent la Ligne. CA
est égale à la Ligne DB ; ce qu'il falloit
démontrer.

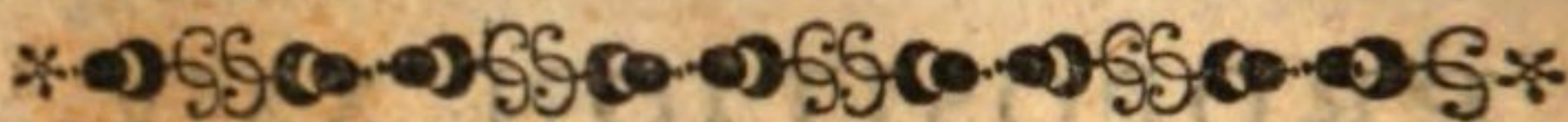
DEMONSTRATION.

Parce que les Angles Alternes CBD ;
ACB sont égaux, il s'ensuit par le Coroll.

C 4

de

de la Prop. 21. que les Lignes CA, BD
sont Paralleles; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XXV.

T H E O R E M E.

*même
fig.*

SI la Figure ABCD est un Parallelogramme, je dis que les Angles & les côtés opposez sont égaux & que la Diagonale CB le partage en deux également.

DEMONSTRATION

Parce que les côtez opposez de ce Parallelogramme sont Parallels par Défin. 21, il s'ensuit par 21. que les Angles Alternes ABC, BCD. CBD, BCA sont égaux, & qu'enfin les deux ou le tôteal ACD est égal aux deux ou au tôteal ABD & par le Coroll. 4. de la Prop. 16, que les Triangles ABC, BCD sont Equiangles, & par 20. qu'ils sont égaux en tous sens, à cause du côté commun CB & que par consequent chacun est moitié du Parallelogramme AECD & qu'ainfi &c.



PRO-



PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

SI les Lignes AF, CX sont Paralleles, je dis que les Parallelogrammes ABCD CDEF, qui y sont renfermez & qui ont même bafe CD, sont égaux. Plan-
che 4.
47. fig.

DEMONSTRATION.

Car les côtez AB, CD ou AB EF. CE, DF. CA DB étant égaux par la précéd. comme auffi par Axiome 4. les Lignes ABE, BEF, on conclut évidemment par 8. que les Triangles ACE, BDF sont égaux en tous fens, & par Axiome 5. que les Trapefes ACBG, EGDF sont égaux, à cause du Triangle commun BGE, & par Axiome 4. que les Parallelogrammes ABCD, CDEF sont égaux à cause du Triangle commun CGD; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XXVII.

T H E O R E M E.

48 fig. SI les Lignes BF, CH sont Paralleles ; je dis que les Parallelogrammes BD, EFGH qui y sont renfermez & qui ont les bâses égales CD, GH sont égaux.

PREPARATION.

Car les bâses CD, GH étant égales, il s'ensuivra que, si par l'imagination on transporte le Parallelogramme EFGH vers le Parallelogramme BD, en sorte que sa bâse GH soit sur la bâse CD ; le Parallelogramme imaginaire AFCD ou le réel EFGH sera égal au Parallelogramme BD par la précédente ; ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

même figure. Si on tire les Droites CE, DF on connoitra encore : que ces Parallelogrammes sont égaux à cause que chacun est égal au Parallelogramme CDEF par la précédente.

PRO-



PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

Si les Lignes, AH, BD sont Paralleles, je dis que les Triangles ABE. AEF, qui y sont renfermez & qui ont la même bāse AE, sont égaux. 49. fig.

DEMONSTRATION

Car ils sont chacun moitié des Parallelogrammes AEBC, AEFD, par 25, qui par 26. sont égaux &c.

COROLLAIRES

I.

Il suit évidemment des raisons précédentes que des Triangles sont égaux quand ils ont des bāses égales & qu'ils sont renfermez entre les mêmes Paralleles.

I I.

Et que les Triangles égaux dessus la même bāse sont entre les mêmes Paralleles.

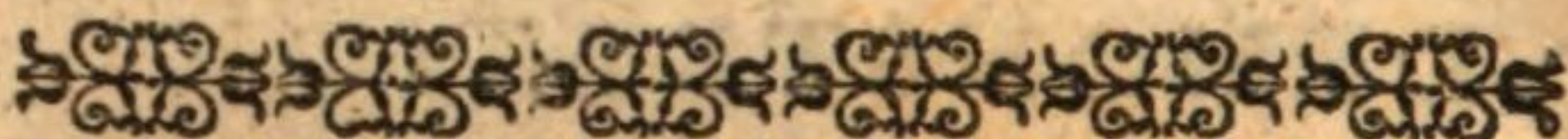
III.

I I I.

Et qu'enfin les Triangles égaux qui ont les bâses égales posées sur une même Ligne Droite sont entre les mêmes Paralleles.

I V.

Et qu'un Parallelogramme & double d'un Triangle par 25. si l'un & l'autre sont renfermés entre les mêmes Paralleles & s'ils ont mêmes ou égales bâses &c.



PROPOSITION XXIX.

P R O B L E M E.

*Plan-
che 4.
51 fig.*

DEcrire un Parallelogramme qui ait un Angle égal au donné H & qui soit égal au Triangle donné AGE.

P R E P A R A T I O N.

Tirés par 23. par le Point ou extrémité A la Droite XB Parallelement à EG, & divisés par 10. la bâse EG en deux également & faites par 19. l'Angle CFG égal à H, & tirés par 23. par le Point G, la Ligne GB, Parallelement à FC qui terminera le Parallelo-

lelogramme CFBG que je dis être celui qu'on avoit proposé de faire.

DEMONSTRATION.

Car il est déjà évident que ce Parallelogramme CFBG est égal au Triangle AEG par le Coroll. 4. de la Prop. 28. à cause des Paralleles XB, EG & de la bâte EG double de la bâte FG par Constr. & des Triangles égaux EAF; FAG par le Coroll. 1. de la même, par conséquent l'Angle CFG étant égal par Constr. au donné H il s'enfuit que le Parallelogramme CFBG est le demandé; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XXX.

THEOREME.

Les Complements du Parallelogramme EFGH sont égaux. 52 fig.

On suppose que OQ est Parallele à FH ou à EG & PR à FE ou à GH & que la Diagonale GF passe par la Section N.

DE-

DEMONSTRATION.

Outre que ce Parallelogramme est divisé par 25. en quatre petits, les Triangles GPN, NOF sont égaux pris ensemble aux Triangles GQN, FRF pris de même, par conséquent, les Triangles GEF, GHF étant aussi égaux par la même il s'ensuit que, si on ôte de part & d'autre les premiers Triangles, les restes ou Complements PENO, QNRH seront aussi égaux; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXXI.

P R O B L E M E.

Plan-
che 4.
53. fig.

DEcrire un Parallelogramme qui ait un de ses côtez égal à la Ligne donnée BC & un Angle égal au donné A & qui soit égal au Triangle XSO.

PREPARATION.

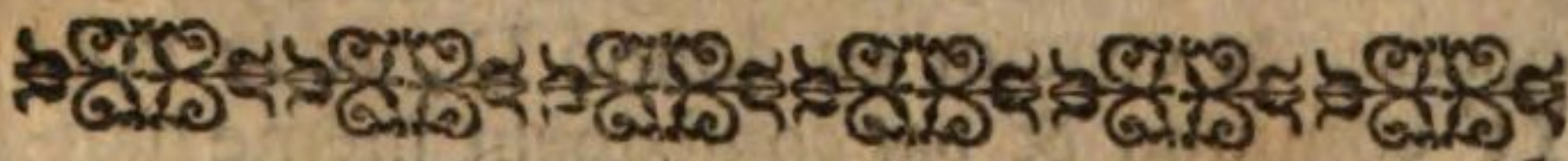
Faites par 29. le Parallelogramme RSXN égal à ce Triangle en sorte que son Angle RXN soit égal au donné A, Prolongés son côté SR en sorte que RQ soit égal à la Ligne donnée BC, prolongés SN & tirés par les

les Points Q, X la Droite QXZ & par la Section Z, la Droite ZV Parallelement à SQ, comme aussi QV à RX par 23, ensuite prolongés la Droite ONX jusqu'en T & RX jusqu'en W;

Je dis que le Parallelogramme XWTV est le demande.

DEMONSTRATION.

Car le côté TX est, par 25, égal à QR ou par égalité à BC, puisque par constr. QR l'est à BC, & par la précédente le Complement TVXW est égal au Complement RXSN où par égalité au Triangle XSO & par 15. l'Angle TXW est égal à l'Angle RXN ou par égalité au donné A, par conséquent le Parallelogramme XWTV est celui qu'on avoit proposé de faire; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

DEcrire un Parallelogramme qui ait un Angle égal au donné D & qui soit égal au Rectiligne donné ABCD. 54, fig.

PRE-

P R E P A R A T I O N

Tirés la Diagonale BD & décrits par 29. le Parallelogramme EFHY égal au Triangle BCD, en sorte qu'il ait l'Angle HEF égal au donné D, & par la précédente décrits le Parallelogramme YKFG égal au Triangle BAD en sorte que son côté YF soit égal à EH ou à FY & son Angle YFG au donné D ou à HEF, enfin joignés ces deux Parallelogrammes, de manière qu'ils composent le Parallelogramme EGHK, qui sera celui qu'on cherche.

D E M O N S T R A T I O N.

Car outre que les deux premiers sont égaux pris ensemble au Rectiligne donné par const. ils ont les Angles FEH, YFG égaux, & chacun au donné D, & le côté YF commun & par consequent même hauteur à cause que leurs bâses composent la Droite EFG; d'où il est aisé de conclure que ce dernier EGHK est celui qu'on avoit proposé de faire; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

D Ecrire un Quarré sur la Ligne donnée *AB.* 55 *fig.*

PREPARATION.

Divisés par 10. cette Ligne *AB* en deux également en *X* & prolongés là de part & d'autre, & retranchés de ses Prolongemens les parties *AZ*, *BZ* égales à *XB* ou à *XA*, puis des milieux *A*, *B* des Lignes *XZ*, *XZ* élevés par 11. les Perpendiculaires *AC*, *BD* hors desquels vous retrancherés par 3. *AC* *BD* chacune égale à *AB*, joignés les Sections *C*, *D* par la Droite *CD* qui achevera le Quarré *ABCD* qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car outre que les Lignes *AC*, *BD*, *AB* sont égales par constr., elles sont aussi Perpendiculaires entr'elles & les Points *D*, *C* sont également éloignés du Point *X*, par Défin. du Cercle, ou par égalité des Points *A*, *B*; d'où il suit que la Ligne *DC* l'est aussi de la Ligne *AB*, & que par consé-

D quent

50 E L E M E N S D E

quent cette Ligne CD est aussi une Perpendiculaire, & qu'enfin la figure ABCD est un Quarré par 18. Défin. puisqu'entre ses côtez & ses Angles il y a égalité; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XXXIV.

T H E O R E M E.

*Plan-
che 5.
57 fig.*

LE Quarré de l'Hypotenuse ou côté AC opposé à l'Angle Droit B du Triangle Rectangle ABC est égal à la somme des Quarrés des deux autres côtés.

DEMONSTRATION.

Car si du sommet B on abaisse la Perpendiculaire BZ qui sera évidemment Parallele à AD, comme aussi à CE. & si on tire les Droites BD, BE, AG, CF, on connoitra par la précéd. que les Triangles FAC, BAD ont les côtés FA, AB égaux, comme aussi les côtés AC, AD, & par 4. qu'ils sont égaux en tout sens, à cause des Angles Droits FAB, CAD & du commun BAC, & par le Coroll, 4. de la Prop. 28. que le Triangle FAC est moitié du Quarré FABH à cause de la base commune FA & des Paralleles HBC, FA, & par les mêmes raisons

GEOMETRIE. LIV. I. 57

sons que le Triangle BAD est aussi moitié du Rectangle AZ, & qu'enfin ces Triangles étant égaux leur double le font aussi, c'est-à-dire que le Rectangle AZ est égal au Quarré AH; & par les mêmes raisons que le Quarré CY est égal au Rectangle CZ, & par égalité que le Quarré AE est égal à la somme des deux quarrés AH, CY & qu'enfin &c.

Autre DEMONSTRATION.

Soit par exemple le Triangle Rectangle 58. *fig.* Ifofcele ABC, il est évident que le Quarré du côté opposé à l'Angle Droit A est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez, puisque cela est visible à cause des 9. grands Triangles O &c. représentés en la figure égaux en tous sens par 4, d'où il suit que ce premier Quarré BE est double d'un des premiers, d'autant que par l'Hypothese ces premiers Quarrez sont égaux entr'eux, donc si l'on diminuë quelconque de ces deux Quarrez égaux, & que par le Point de diminution, par exemple O, on tire la Droite BO, il est évident que diminuant à l'infini ce même Quarré, & que tirant à chaque Point de diminution, des Droites du Point B, qu'à la fin, BC étant devenuë BO, & BO, BZ, & BZ, BX, &c. cette Droite BC deviendra BA, parce qu'elle diminuë à proportion qu'elle s'en approche de cette façon, d'où il est aisé de conclurer que puisque par les diminutions des Quarrez des Lignes CA, BC il ne reste
D 2 plus

52 E L E M E N S D E

plus que deux Quarrez égaux, tous les Triangles ont été Escalenes & la première diminution du Quarré de AC à été égale à l'excès du Quarré de BC sur le Quarré de BO, comme aussi la seconde à l'excès du Quarré de BO sur le Quarré de BZ, & qu'enfin la troisième diminution à été égale à l'excès du Quarré de BZ sur celui de BX & ainsi jusqu'à la fin, car si cela n'étoit pas, le Quarré de BC n'auroit pas été égal à la somme des Quarrez de BA, de AC; d'où il s'ensuit que le Quarré du côté opposé à l'Angle Droit de quelque Triangle Rectangle Rectiligne que ce soit, est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtés; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXV.

T H E O R E M E.

*Plan-
che 4.
56 fig.*

SI le Quarré d'un côté quelconque AB d'un Triangle comme ACB est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtes, je dis que l'Angle opposé à ce côté AB est Droit.

DEMONSTRATION.

Car si du Point C on élève par 11. la Perpendiculaire CD & que l'on la coupe
égale

égale à BC, on connoitra par la précéd. en tirant AD que le Quarré de AD est égal au quarré de AC plus à celui de CD ou par égalité plus à celui de CB, or le Quarré de AB est par l'Hypothese égal à ces mêmes Quarrez de AC de BC, d'où on conclut que les Lignes AB, AD sont égales; par consequent les Lignes BC, CD l'étant aussi par constr., il s'ensuit que AB étant commune, les Triangles ABC, ACD sont par 8. égaux en tous sens, & qu'ainsi l'Angle Droit ACD est égal à l'Angle ACB, qui par consequent est aussi Droit; ce qu'il falloit démontrer.

Fin du Livre premier.





E L E M E N S
D E
G E O M E T R I E ,
O U
D E L A M E S U R E D U C O R P S .

LIVRE SECON D.



UCLIDE nous ayant expliqué dans le livre précédent les propriétés du Parallélogramme en général, il continuë de nous traiter dans celui-ci des puissances des Lignes Droites divisées également & inégalement, comparant les divers Rectangles compris sous les parties d'une Ligne divisée, tant avec le Rectangle compris sous toute la Ligne & une de ses parties, qu'avec son Quarré &c. Quoique ce Livre soit fort simple

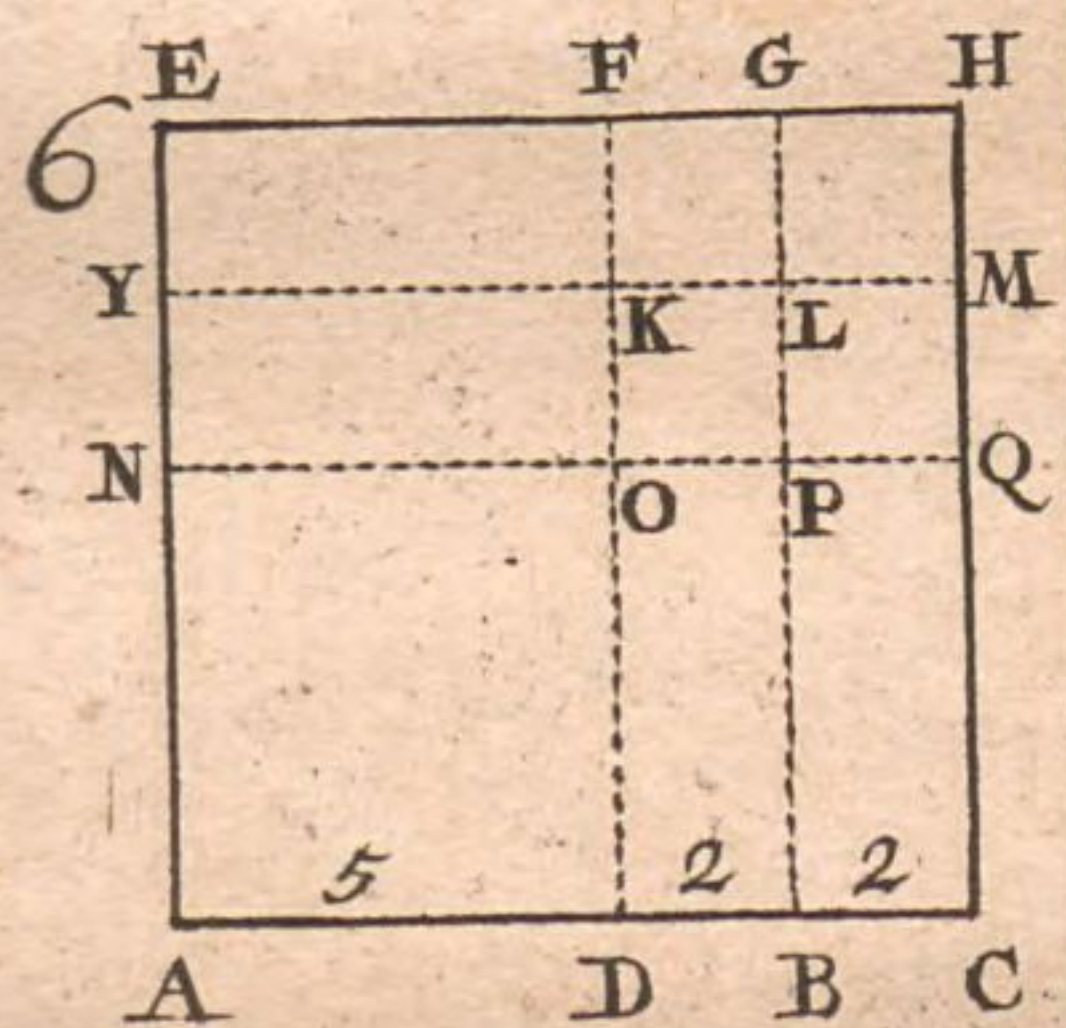
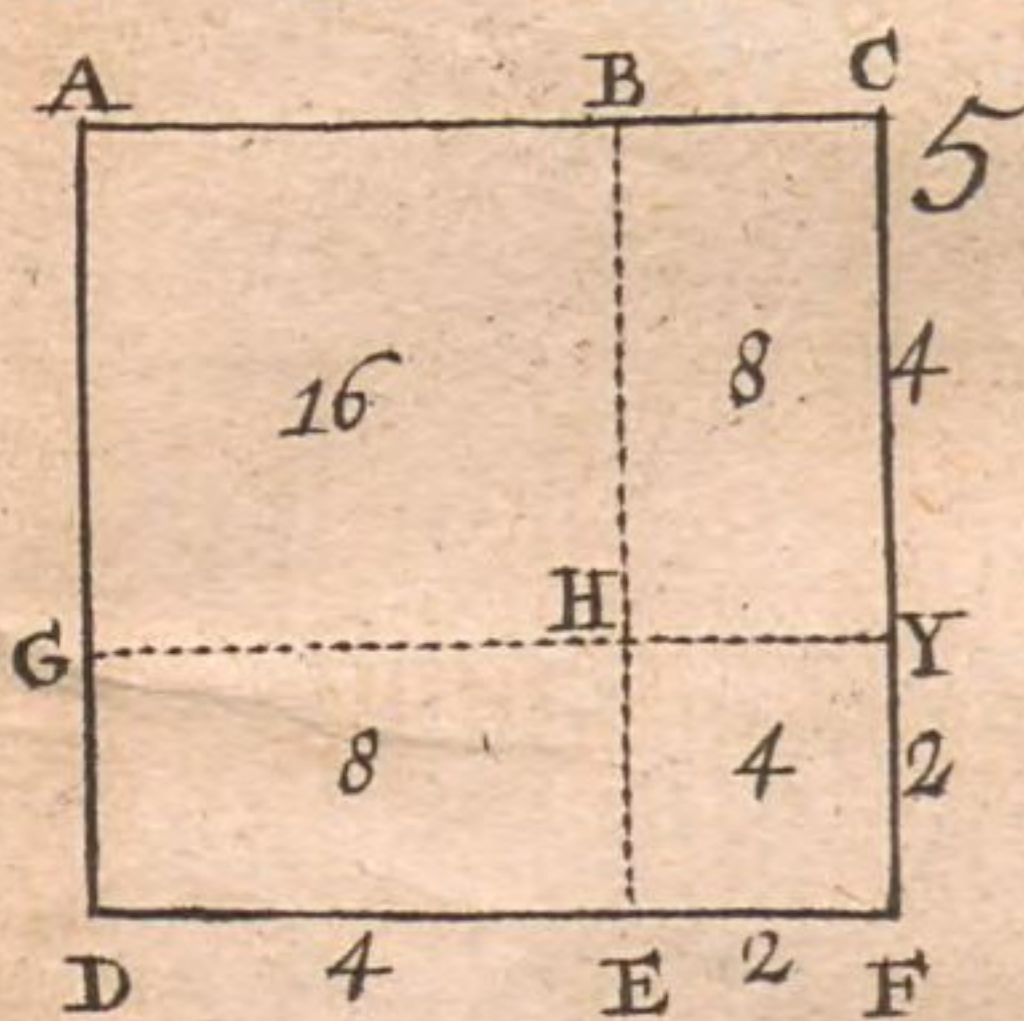
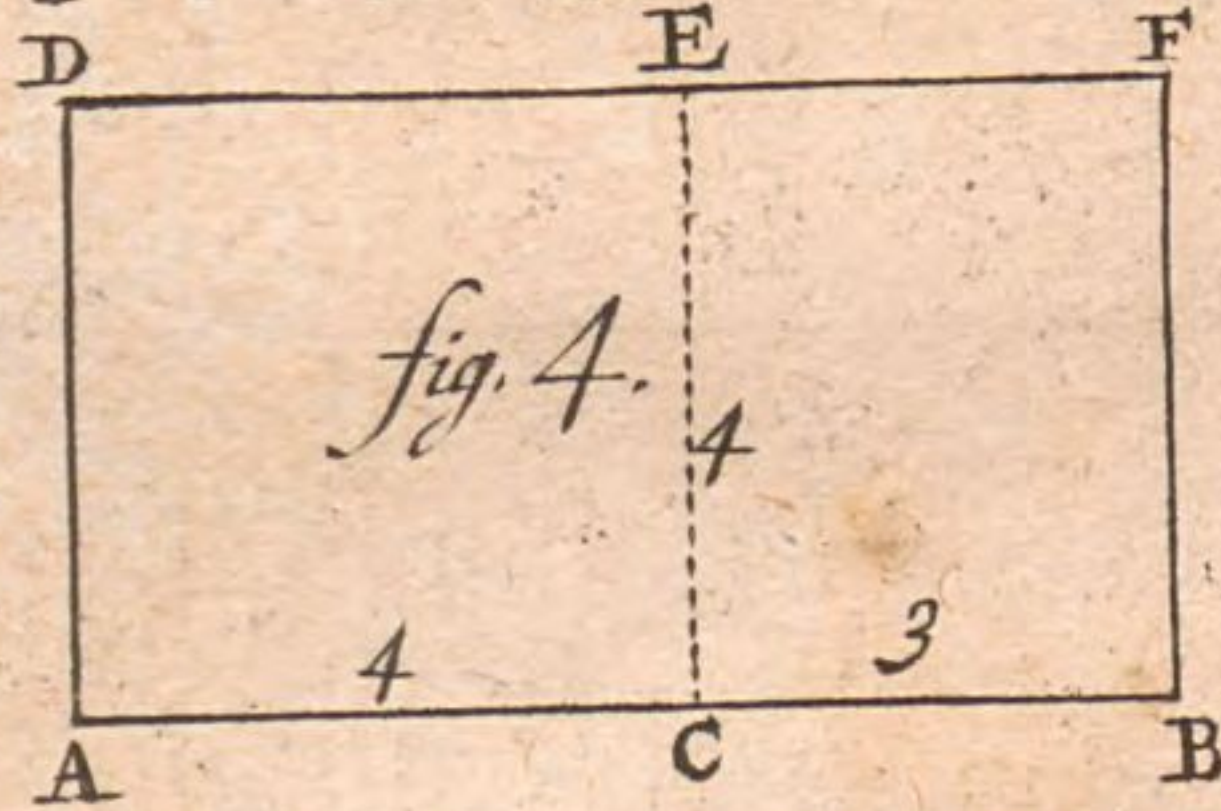
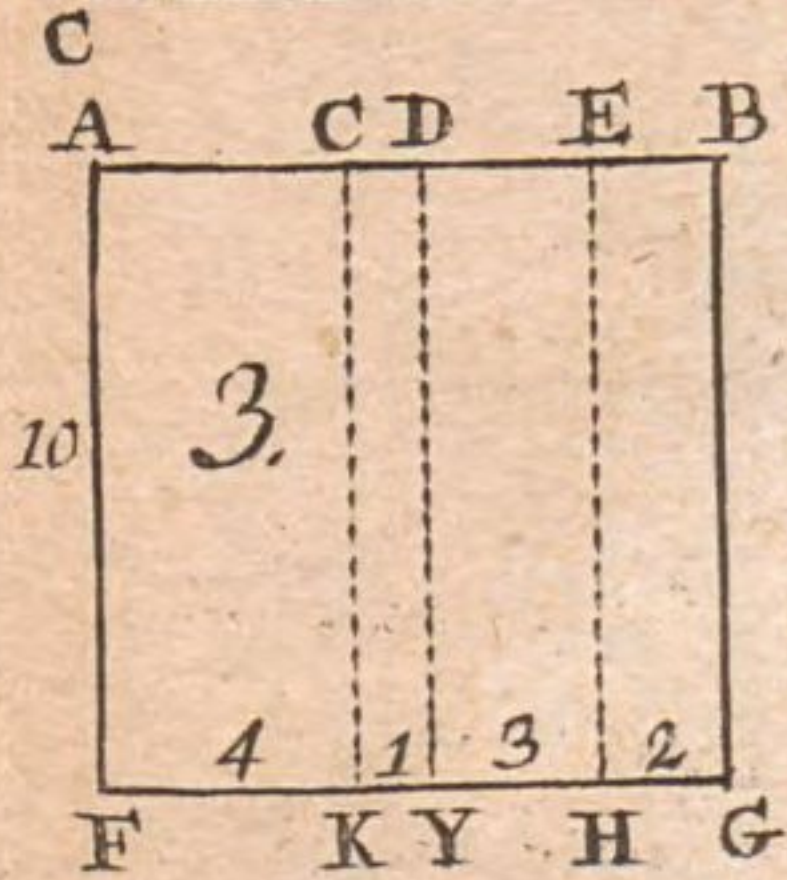
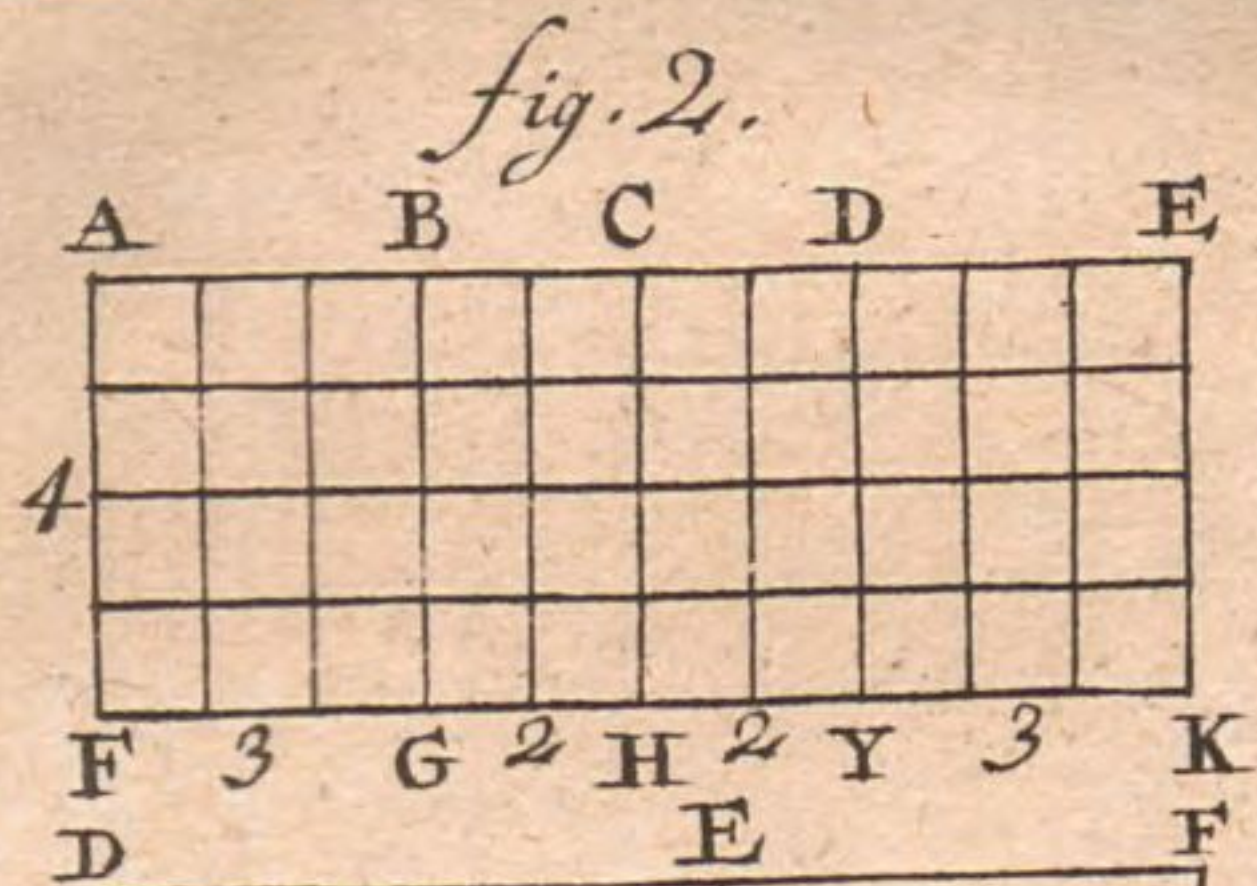
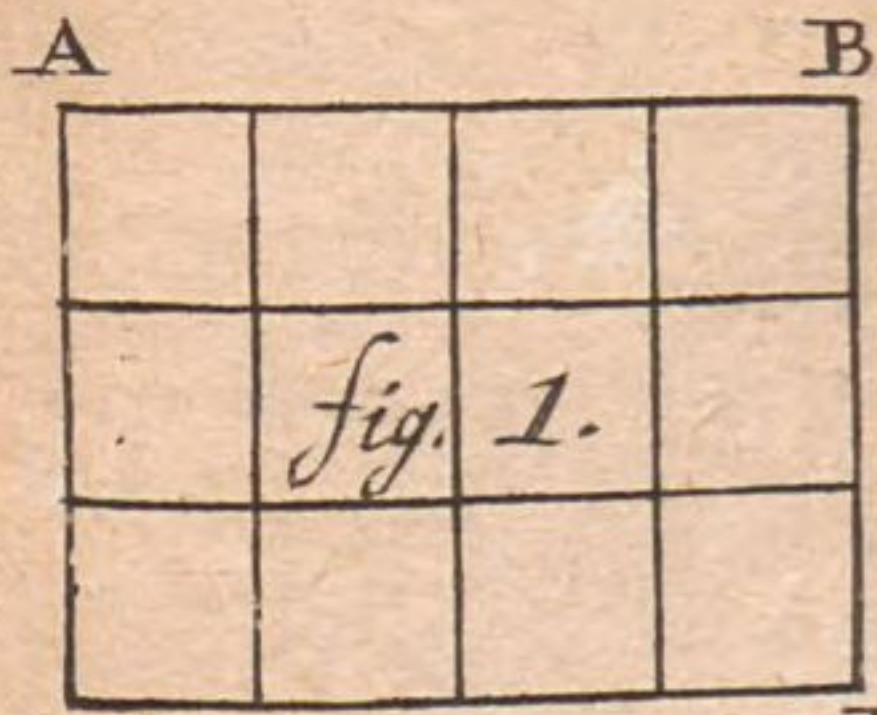
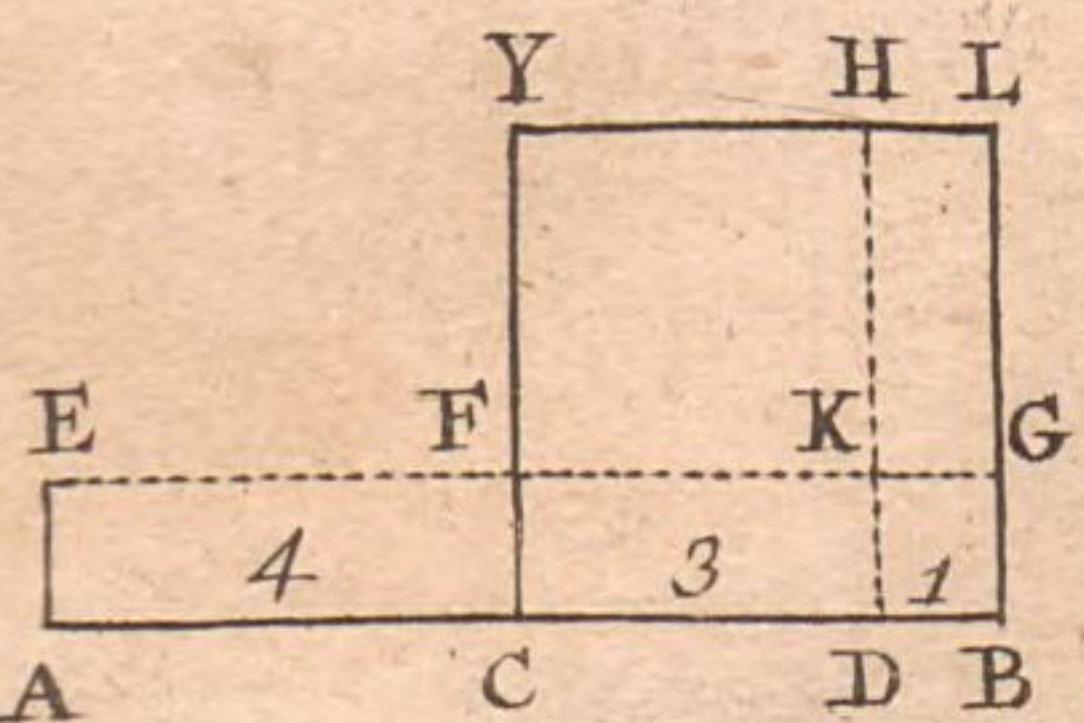
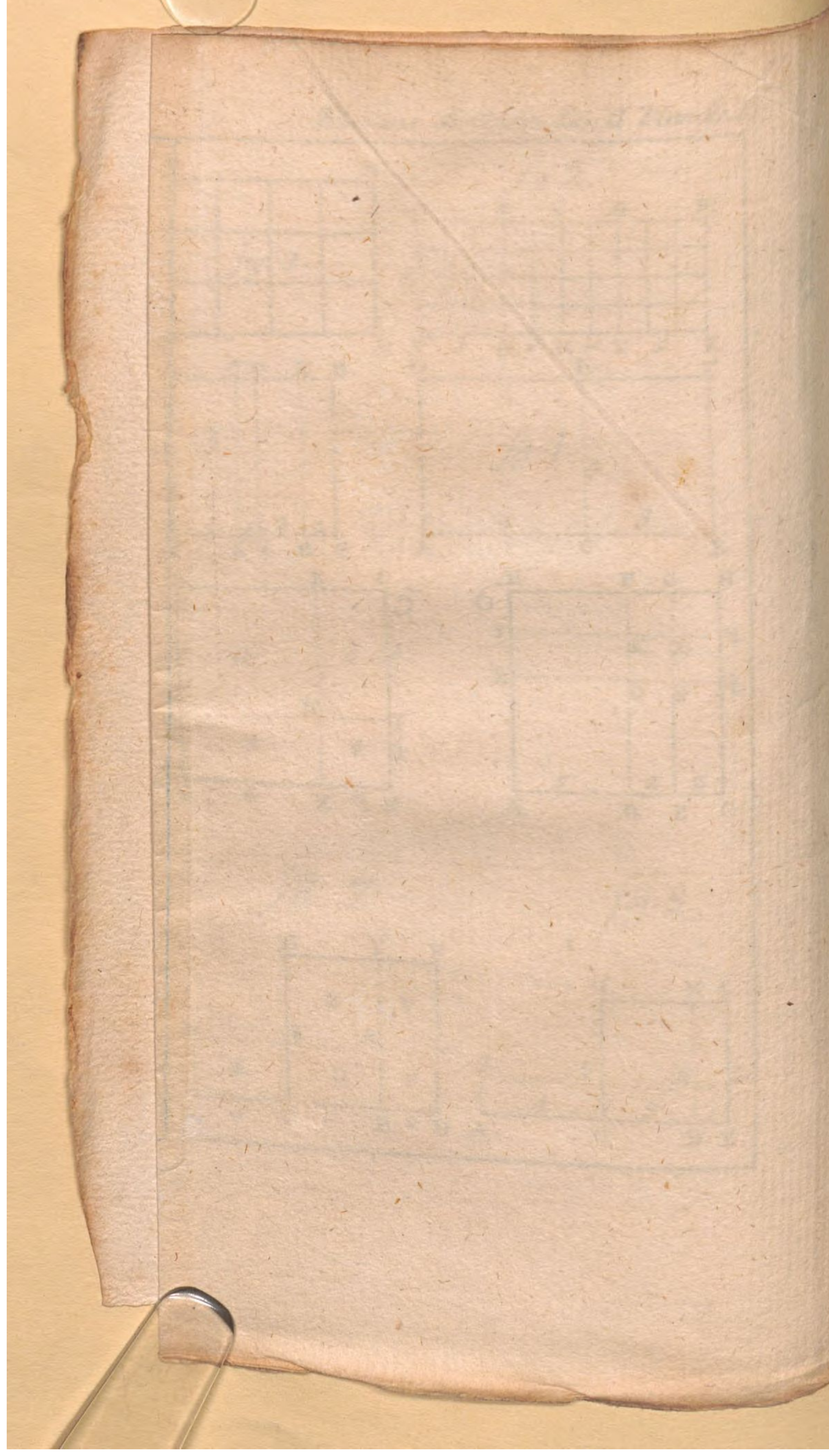


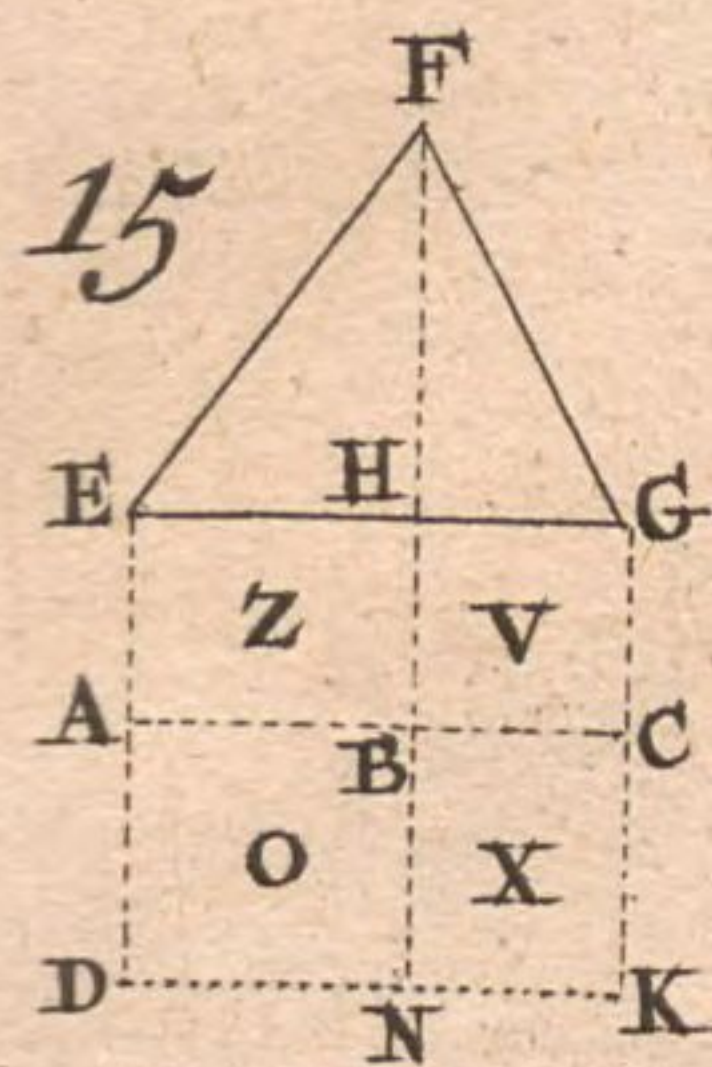
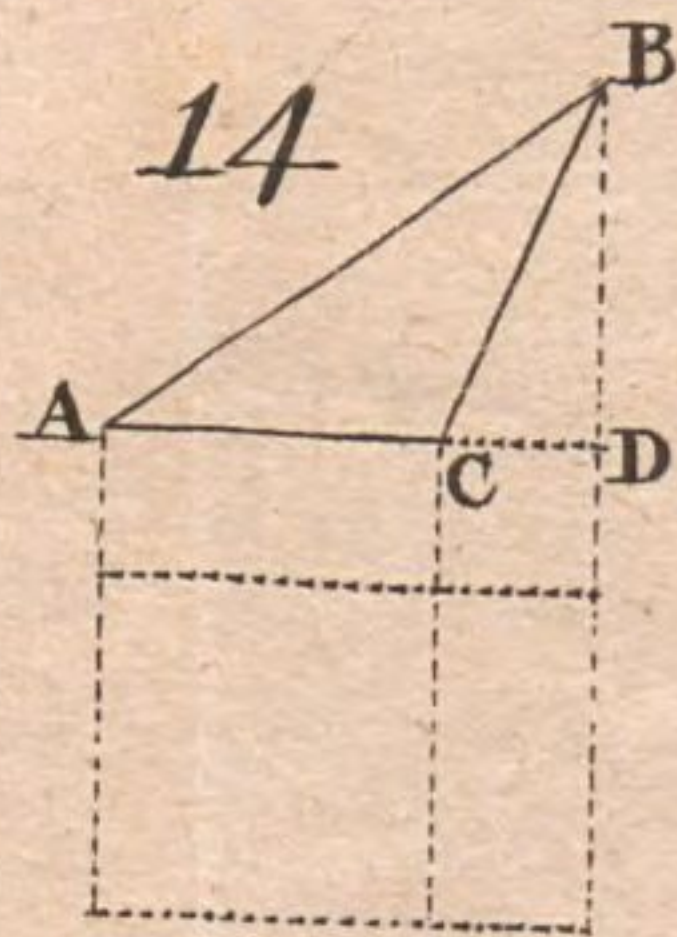
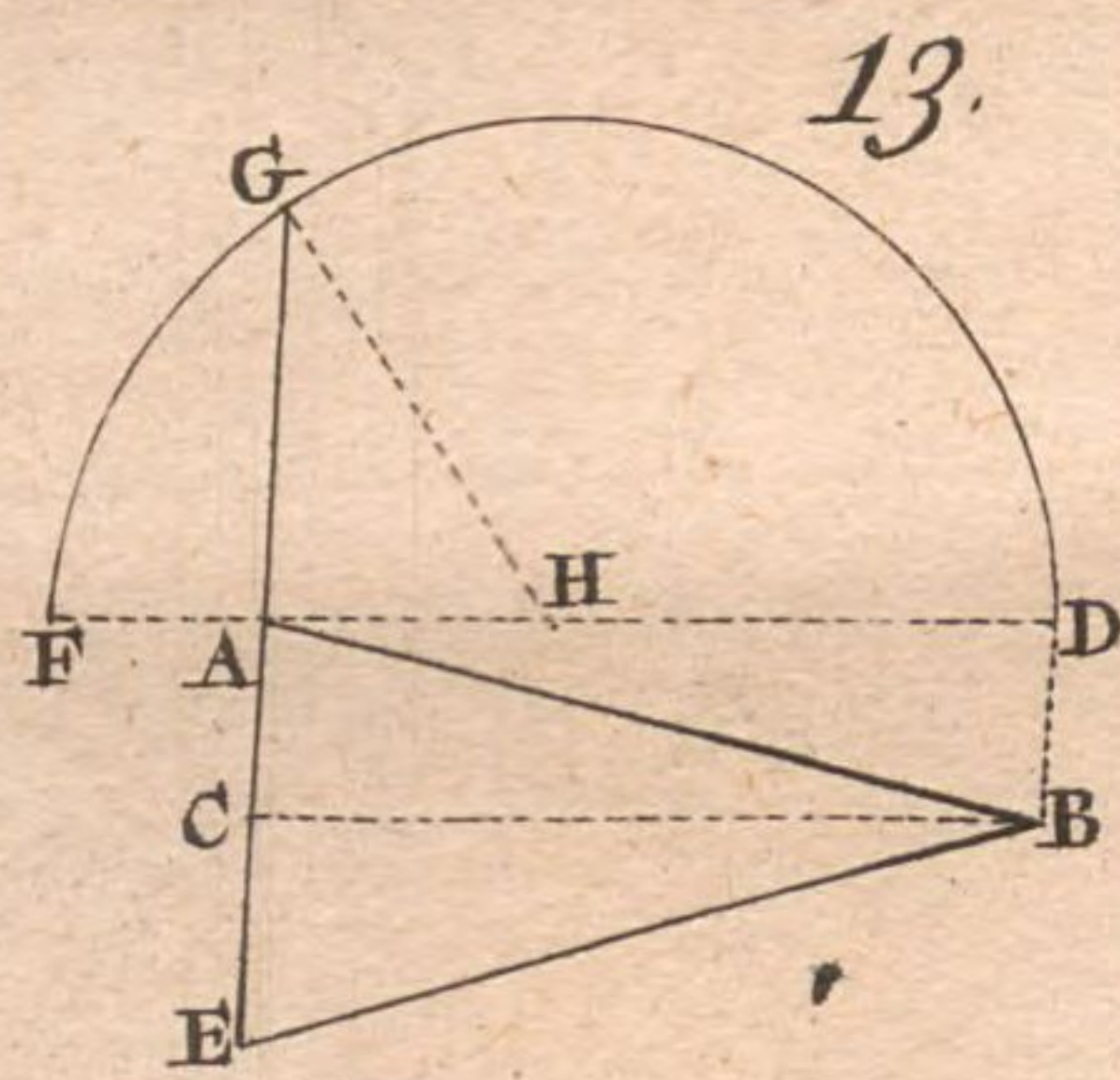
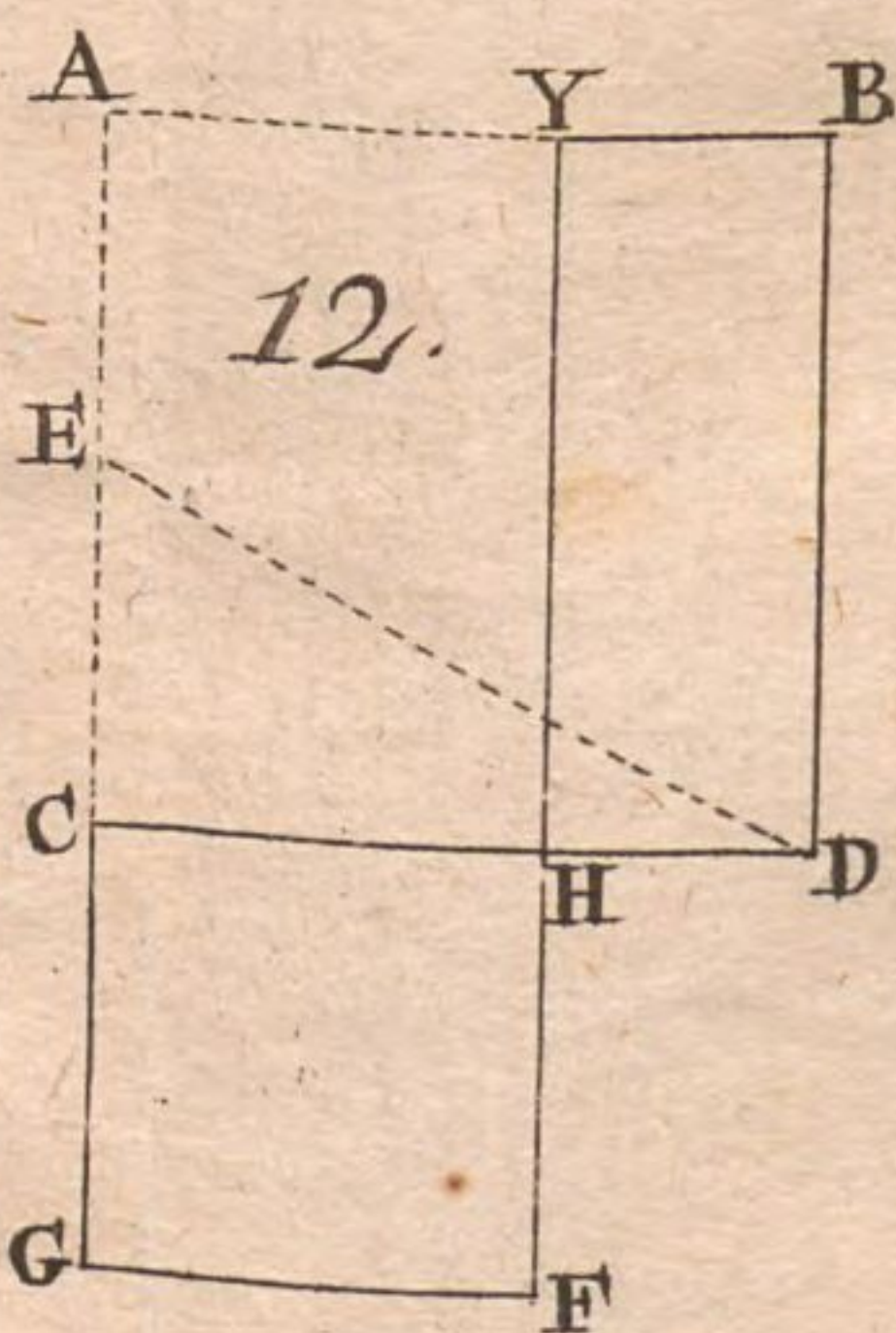
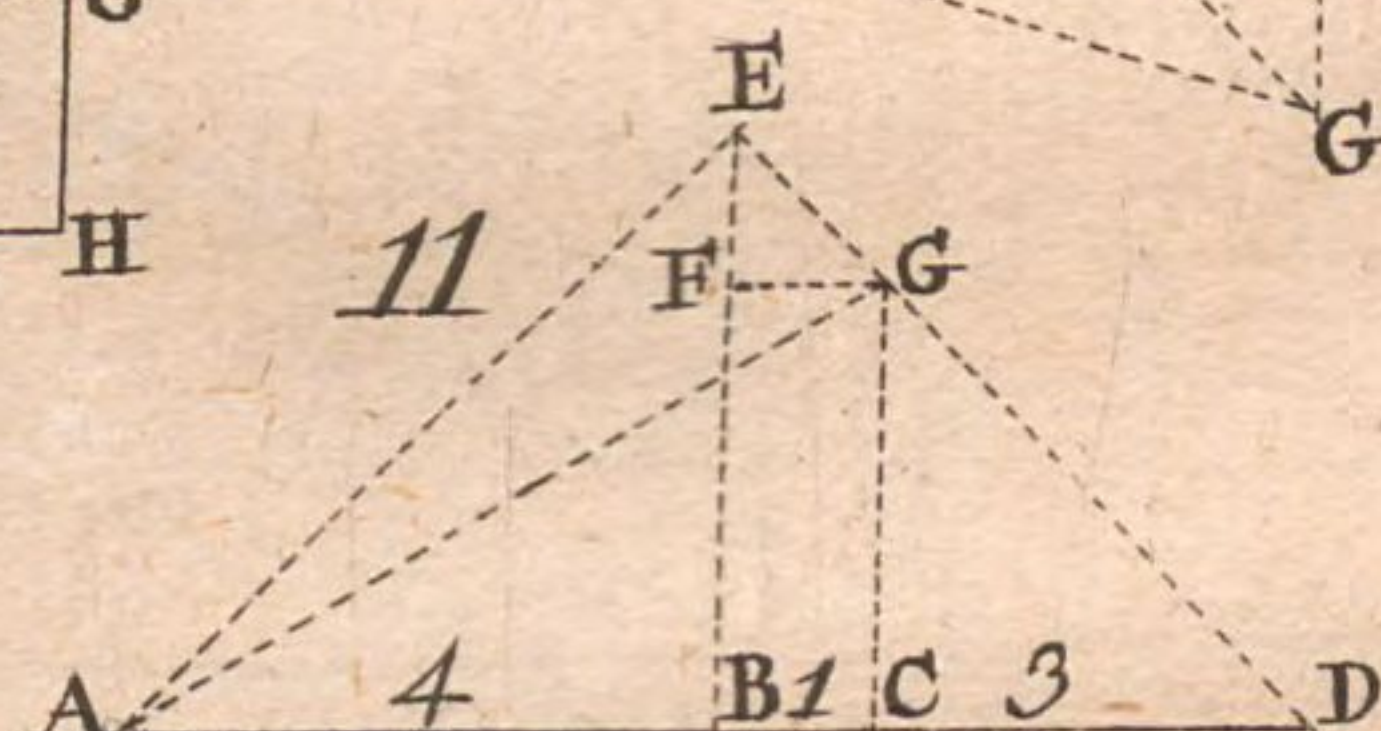
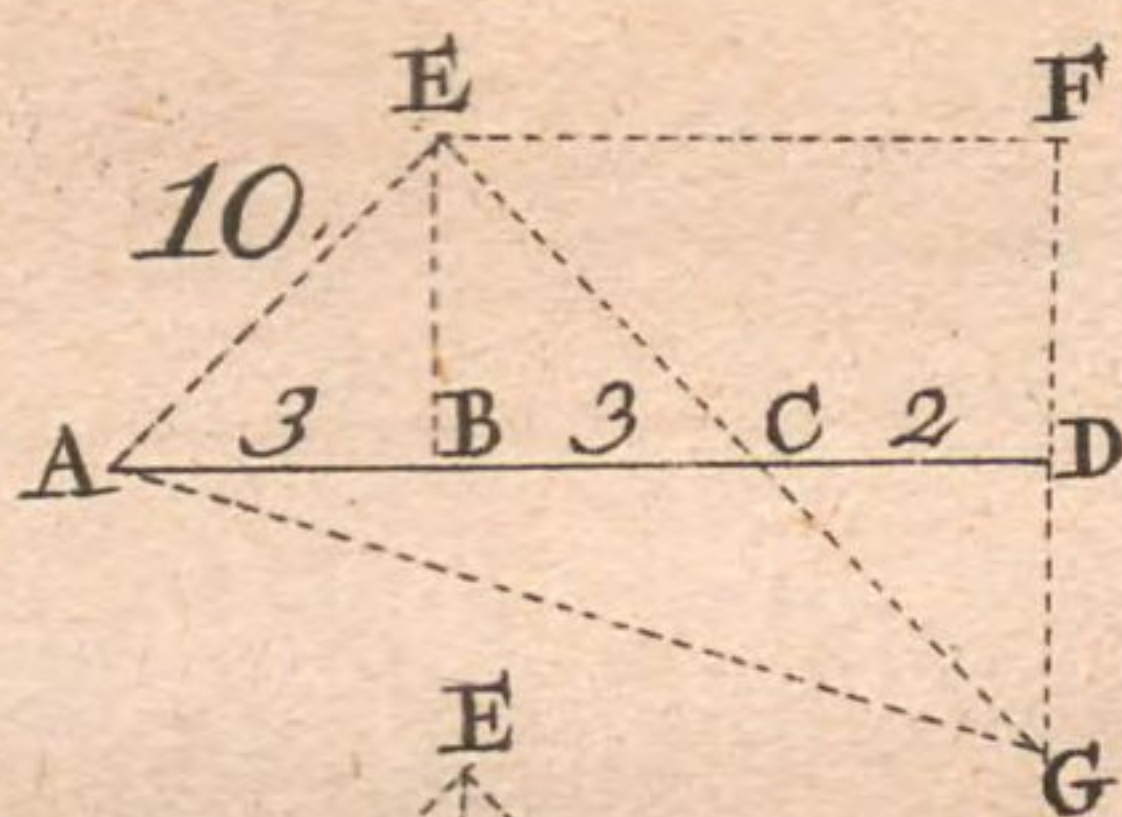
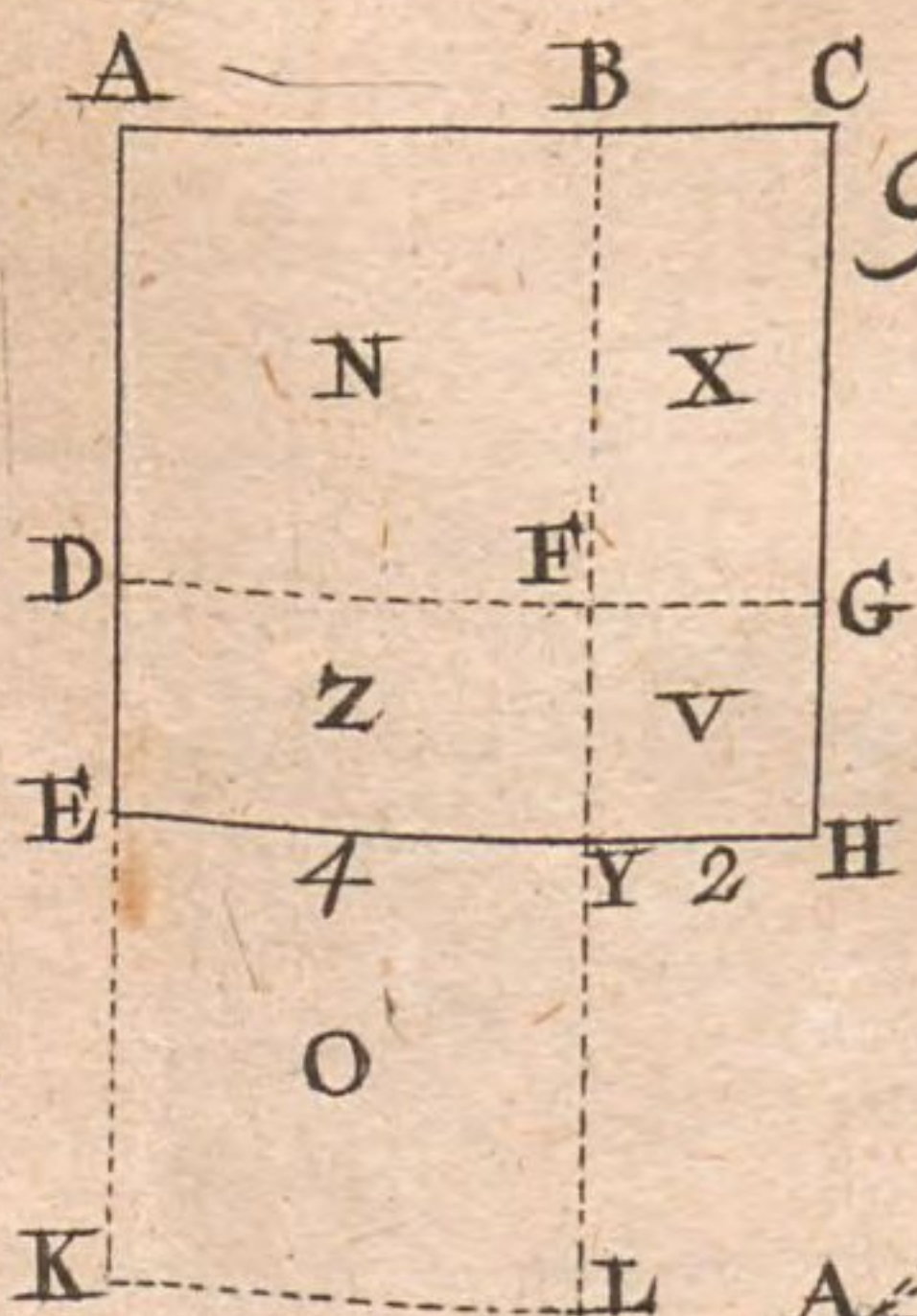
fig. 7.



fig. 8.







ple en lui même & qu'il semble être d'une petite consequence, il ne laisse pas néanmoins d'être d'une grande utilité ; c'est pourquoi, afin que le Lecteur n'y trouve point de difficulté, je le prie de bien examiner les figures & de faire attention qu'il est fondé sur un Principe très évident qui nous apprend qu'un Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.



REMARQUES.

I.

Dans la suite on appellera simplement *Plan-Rectangle* tout *Parallelogramme* qui aura *che* 1. les côtés opposés égaux, comme aussi tous 1. *fig.* les Angles Droits.

I I.

Et que lorsqu'on dira le Rectangle compris sous CD, CA, on entendra que sa longueur est CD & sa largeur CA qui étant multipliées l'une par l'autre produisent par la Déf. 6, du 1. le Rectangle ABCD &c. *même figure.*

LEMME

Si on multiplie ces deux nombres 4, 9, l'un par l'autre, il est évident que leur produit

D 4

duit

duit sera 36; maintenant si l'on divise le nombre 9. en autant de parties que l'on voudra, par exemple en trois inégales comme sont ces nombres 2, 3, 4, qui pris ensemble sont égaux à 9, & que l'on les multiplie separement par le premier 4, il est évident que la somme de leur produit, sera encore égale au produit 36, du nombre entier 9, multiplié par le premier 4, car 4 fois 2, font 8. & 4 fois 3 font 12, & 4 fois 4 font 16, & 8 plus 12 plus 16 font aussi 36, donc &c.

C'est ce qui se verifera par toutes sortes de suppositions semblables, pourvû que les parties d'une des quantités données, ne soient pas supposées plus grandes ou plus petites qu'on ne l'a divisée.

Je ne mets ce Lemme ici, que pour servir à découvrir plus facilement la verité des Propositions de ce Livre &c.



PROPOSITION I.

T H E O R E M E.

*Plan-
che 1.
2 fig.*

SI l'on propose les deux Lignes AF, FK, je dis, que si on divise FK en autant de parties que l'on voudra, le Rectangle FE compris sous FA, FK, est égal aux Rectangles compris sous AF, & les parties de la Ligne FK.

Que

Que FK soit 10, FG 3, GH 2, HY 2, YK sera 3.

DEMONSTRATION

Parce que le Rectangle FE compris sous FA, FK est égal à toutes ses parties prises ensemble, ou petits Rectangles FB, GC, HD, YE il s'ensuit que &c.

Le Rectangle FE 40 est aussi égal à FB 12 avec GC 8 avec HD 8 avec YE 12, puisque la somme de ces nombres fait aussi 40.



PROPOSITION II.

THEOREME.

LE Quarré d'une Ligne comme FG, est égal aux Rectangles compris sous cette même Ligne, & ses parties FK, KY, YH, HG. 3. fig.

Que FA ou FG soit 10, & FK 4, & KY 1, & YH 3, HG sera 2.

DEMONSTRATION.

Le Quarré FB est, par la précéd., égal à toutes ses parties prises ensemble ou petits Rectangles FC, KD, YE, HB compris

58 E L E M E N S D E

pris sous FA égale à FG & les parties de cette Ligne FG ce qu'il falloit démontrer.

Ou 100 est égal à 40, plus 10, plus 30, plus 20, puisque la somme de ces nombres est aussi 100.



PROPOSITION III.

T H E O R E M E.

4. fig.

SI la Ligne AB est divisée en deux parties, comme AC, CB, je dis que le Rectangle, compris sous cette Ligne AB & une de ses parties comme AC, est égal au Quarré de cette même partie ou Ligne AC, plus au Rectangle compris sous les deux AC, BC.

PREPARATION.

Faites la Perpendiculaire AD égale à AC, & achevés le Rectangle AF, & tirés ensuite la Perpendiculaire CE.

Que AB soit 7, AC, 4. CB sera 3.

DEMONSTRATION

Parce que le Rectangle AF est, par la précéd., égal au Quarré AE, plus au Rec-
tan-

tangle CF, compris sous les parties CB, CE égale à AD où à AC, à cause que AD l'est par constr. à AC, il s'ensuit que &c.
28. est aussi égal à 16 plus 12 &c.



PROPOSITION IV.

THEOREME.

SI la Ligne DF, est divisée en un Point quelconque E, je dis que le Quarré de la toute DF, est égal aux Quarrez de ses parties DE, EF plus à deux Rectangles compris sous ces mêmes parties DE, EF. 5. fig.

PREPARATION.

Faites le Quarré de DF, coupés FY égal à FE, tirés YG Parallelement à DF, comme aussi EB à FC.

Que DF soit 6, & DE 4, EF sera 2.

DEMONSTRATION.

Parce que la Ligne BE, est Parallele à AD & GY à AC, & que les Perpendiculaires GD, FY, FE, BC sont égales entr'elles, il s'ensuit par la Défin. 19. du Liv. 1. que toutes ces figures sont des Rectangles, & que les deux AH, HF sont Quar-
rés

rés des parties DE; EF, parce qu'en retranchant de DA, égale à DF par const. la partie DG égale à YF ou à EF, les restes GA, DE ou GH sont égaux; or FY étant égale à FE par const., ou à EH, la figure HF sera Quarré de la partie EF; par conséquent les Rectangles DH, HC étant compris sous côtés égaux HB, GH. ou DE. HY, HE ou EF, on conclut évidemment de là qu'ils sont égaux, & par les précéd. que le Quarré DC, compris sous la toute DF, est égal aux Quarrez des parties DE, EF, plus aux deux Rectangles DH, HC, compris sous ces mêmes parties DE, EF.

Ou que 36. est égal à 16. plus 4 plus 8 plus 8, puisque la somme de ces nombres est aussi 36.



PROPOSITION V.

T H E O R E M E.

8. fig. SI la Ligne AB est divisée en deux également en C & en deux inégalement en D, je dis que le Quarré de la moitié CA, ou CB de la toute AB, est égal au Rectangle compris sous les parties inégales AD, DB, plus au Quarré de la partie du milieu CD.

PRE-

PREPARATION.

Faites le Quarré de BC, tirés DH Parallelement à BL, coupés BG égale à DB, & achevés le Rectangle BE.

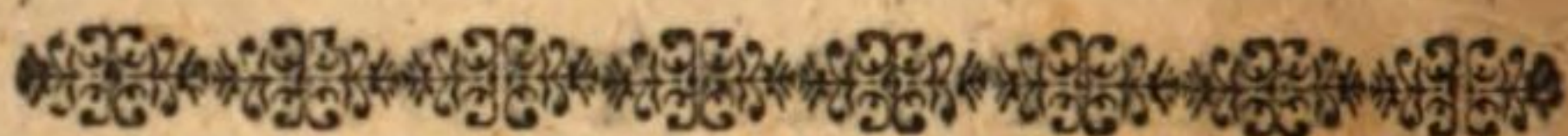
Que AB soit 8, AC sera 4, que CD soit 3, DB sera 1.

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident que les figures HF, DG font, par la précéd., Quarrez des Lignes CD, DB, & que les Rectangles AF, DL font égaux, puisque par constr. le côté BL est égal à BC ou au côté CA, & le côté DB l'est à BG ou au côté CF, par consequent si à ces Rectangles égaux on ajoute le Rectangle CDHY, on connoitra évidemment que le Quarré CL, de la moitié CB de la toute AB, est égal au Rectangle AK, compris sous les parties inégales DA, DK égale à DB, plus au Quarré FH de la partie du milieu CD ce qu'il falloit démontrer.

Où que 16 est égal à 7 plus 9 &c.





PROPOSITION VI.

T H E O R E M E

Plan-
che I.
7 fig.

SI on ajoute la Ligne BD, à la Ligne LB, divisée en deux également en C, je dis que le Rectangle, compris sous la tôtele LD, & l'ajoutée BD, avec le Quarré de la moitié BC, de la divisée LB, est égal au Quarré de la Ligne CD, composée de la moitié de la divisée & de l'ajoutée comme d'une.

PREPARATION.

Faites le Quarré de CD, tirés BY Parallelement à DF, coupés DG égale à DB, & achevés le Rectangle DH.

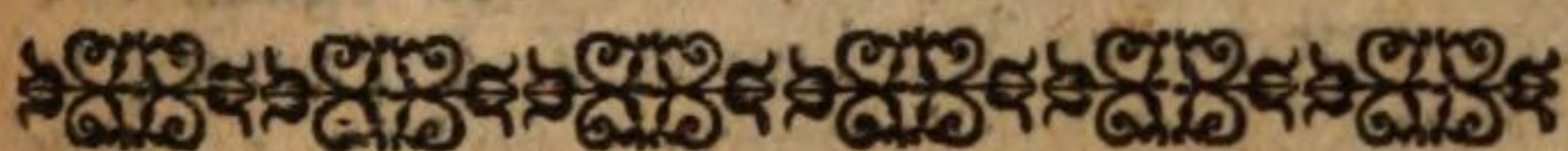
Que LB soit 6, LC sera 3 & CB 3 que BD soit 2.

DEMONSTRATION.

Parce que les figures EA, AD sont par les précéd. Quarrés des Lignes CB, BD. & que les Rectangles AF, CA, CH sont égaux entr'eux, on conclut évidemment que si aux Rectangles égaux AF, CH, on ajoute
tc

te le Gnomon NOZ, le Rectangle LG, compris sous la composée LD & l'ajoutée DB ou DG, avec le Quarré Z de la moitié CB, de la divisée LB, est égal au Quarré CF, compris sous la moitié de la divisée & de l'ajoutée comme d'une, ce qu'il falloit démontrer.

Ou que 16 avec 9. est égal à 25 &c.



PROPOSITION VII.

THEOREME.

SI on divise la Ligne EH en deux parties, je dis que le Quarré de la toute EH, avec le Quarré d'une de ses parties, comme EY, est égal à deux Rectangles, pris sous la toute EH & cette partie prise EY, plus au Quarré de l'autre partie YH, *Plan-
che 2.
9 fig.*

PREPARATION.

Faites le Quarré de EH, coupés HG égale à HY, & tirés DG Parallelement à EH, & BY à HC, faites le Quarré de EY. Que EH soit 6, EY 4, YH fera 2.

DE:

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident que les figures N ou O & V, sont, par les précéd., Quarrez des Lignes EY, YH, & que les Rectangles EF, FC sont égaux, & qu'enfin ajoutant choses égales aux Quarres égaux O, N, c'est-à-dire X à l'un & Z à l'autre, la figure OZ est par l'axiome 4. du Liv. 1. égale à la figure NX, comme aussi par conséquent le Quarré EC de la toute EH avec le Quarré O, de la partie prise EY; aux deux Rectangles KF, DC, compris sous cette toute EH & sa partie prise EY, plus au Quarré YG de son autre partie YH ce qu'il falloit démontrer.

Le Quarré EC est 36 & celui de EY est 16 qui étant joints font 52, nombre qui est bien égal à celui de DC 24 avec celui de DL 24 avec celui du Quarré V 4, car 24 plus 24 plus 4. font aussi 52.



PROPOSITION VIII.

T H E O R E M E

*Plan-
che 1.
6 fig.*

SI on ajoute à la Ligne AB divisée en SD, une de ses parties comme DB, je dis que le Quarré de la toute AC, est égal à

à quatre Rectangles compris sous la première AB & l'ajoutée BC, plus au Quarré de l'autre partie AD.

PREPARATION.

Faites le Quarré de AC, tirés BG, DF Parallelement à HC, & coupés, HM, MQ chacune égale à BC ou à BD, & tirés les Droites YM, NQ Parallelement à EH.

Que AB soit 7, AD 5, DB sera 2. & BC, 2.

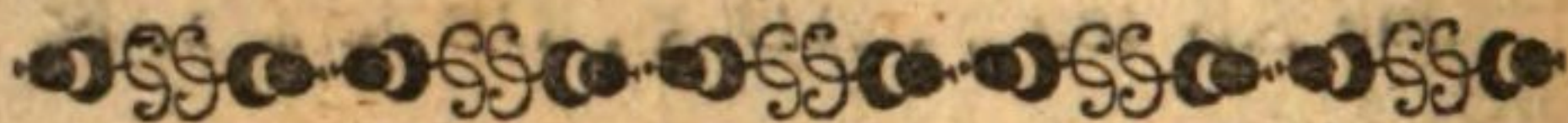
DEMONSTRATION.

Parce que les figures AO, OL, LH sont par les précéd. des Quarrez, & que les Rectangles YG, BM. YO, OB sont égaux, comme aussi les Quarrez OL, LH, à cause que leurs côtes le sont pareillement par const., il s'ensuit que, si on ajoute à chaque des Rectangles égaux YO, OB, un de ces Quarrez égaux, le Rectangle NL sera d'une part égal à YG, car outre les bâses égales NP, YL, les hauteurs LP, LG le sont aussi, & de l'autre part OB avec LH sera égal à BM, ou par égalité au même YG, & les trois Rectangles YG, YP, BM seront égaux entr'eux, & OB avec LH fera le quatrième; par conséquent si à ces quatre Rectangles égaux, on ajoute le Quarré AO de la Droite AD, on aura raison de dire que le Quarré AH de la toute AC est, évi-

E den

denment, égal à quatre Rectangles compris sous la première AB & l'ajoutée BC, plus au Quarré de l'autre partie AD; ce qu'il falloit démontrer.

Le Quarré de AC est 81, parce que 9 fois 9 font 81, or quatre fois le Rectangle compris sous AB, BC faisant 56, à cause que ce Rectangle est 14 & que 4 fois 14 font 56, il est évident qu'avec le Quarré de AD 25 il fait aussi 81, car 56, plus 25 est égal au nombre 81. &c.



PROPOSITION IX.

T H E O R E M E.

Plan-
che 2.
II. fig.

SI la Ligne AD est divisée en deux également en B, & en deux inégalement en C, je dis que la somme des Quarrez des parties inégales AC, CD, est double du Quarré, de la moitié AB de cette Ligne AD, avec le Quarré de la partie d'entre deux BC.

P R E P A R A T I O N.

Elevés du milieu B la Perpendiculaire BE, de sorte que AB, BE, BD soient égales entr'elles, & tirés les Droites AE, ED, & CG Perpendiculairement à BD, & enfin FG Parallelement à BCD, tirés AG.

Que

Que AD soit 8, AB sera 4, que BC soit 1, CD sera 3, à cause de BD égale à AB par supp.

DEMONSTRATION.

Outre les Angles Droits ABE, EBD, les Lignes AB, BE, BD sont égales entr'elles par const., & les Triangles ABE, EBD sont Isosceles par la Déf. 17. du Liv. I, comme aussi les Triangles EFG, GCD par la Prop. 16. du même Liv. à cause des Angles Droits EFG, GCD, & de ceux aux bases FEG, CDG qui sont demis Droits, & le Quarré de AE est, par 34, 1, double du Quarré de BE ou de AB, comme aussi celui de EG, de celui de FG ou de BC, & les Angles AEB BED sont demis Droits, & le total AED est Droit, & par 34, 1 le Quarré de AG est égal à ceux de AE, de EG ou à ceux de CG ou de CD, de CA qui par consequent sont aussi doubles de ceux de AB de BC; ensorte donc qu'on a raison de dire, que la somme des Quarrez des parties, inégales AC, CD est double du Quarré de la moitié AB, avec le Quarré de la partie d'entre deux BC; ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que le Quarré de AC 25, avec celui de CD 9, est double du Quarré de AB 16, avec celui de BC. 1. car 25, plus 9 faisant 34, il est très clair que ce nombre 34 est double de 17 nombre égal à 16 plus 1. &c.



PROPOSITION X.

T H E O R E M E.

10 *fig.* SI on ajoute une Ligne comme par exemple CD, à la Ligne AC, divisée également en, B je dis que le Quarré de la toute AD, avec le Quarré de l'ajoutée CD, est double du Quarré de la moitié AB, de la Droite AC, avec le Quarré de BD.

P R E P A R A T I O N.

Elevés les égales BE, DF à AB ou à BC, enforte qu'elles soient Perpendiculaires à AD, tirés AE, EF, & ECG, qui se termine au Point ou extrémité G du prolongement de la Droite FD.

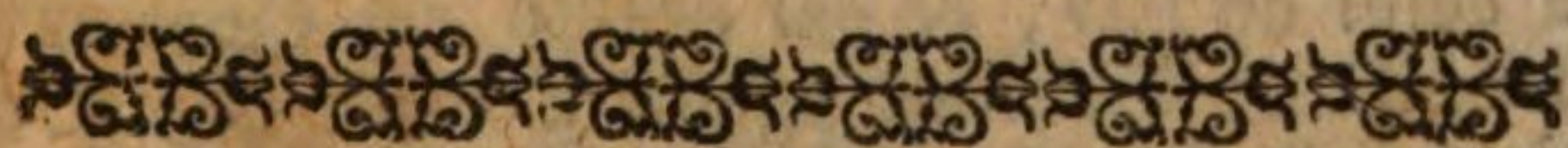
Que AC soit 6, AB sera 3. comme aussi BC, que CD soit 2.

D E M O N S T R A T I O N.

Parce que les Triangles ABE, EFG, CDG sont Isosceles par la Précéd., il s'ensuit par 34, 1, que le Quarré de AE est double du Quarré de AB, & que celui de
EG

EG l'est de celui de EF ou de BD, or celui de AG étant égal aux deux de AE, de EG, à cause de l'Angle Droit AEC par la Précéd. , il s'ensuit que celui de AG est aussi double de ceux de AB de BD, & qu'enfin ceux de AD de DG ou de DC le sont aussi de ces mêmes de AB de BD, à cause que ces Quarrez de AD de DG ou de DC sont égaux à celui de AG, & que par conséquent le Quarré de la toute AD, avec le Quarré de l'ajoutée CD est double du Quarré de la moitié AB, de la Droite BC, avec le Quarré de BD; ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que le Quarré de AD 64, avec celui de CD 4, est double du Quarré de AB 9, avec celui de BD 25, car 64 plus 4 faisant 68, il est constant que ce Nombre 68 est double du nombre 34 égal à 9 plus 25 &c.



PROPOSITION XI.

P R O B L E M E.

Diviser la Ligne CD, de manière que *plan-* le Rectangle compris sous la toute CD *che 2.* & la plus petite de ses parties, soit égal au 12 *fig.* Quarré de l'autre partie.

PREPARATION.

Décrivés le Quarré de CD, & divisés son côté CA en deux également en E, & prolongés EC, enforte que EG soit égale à ED, coupés CH égale à CG, & élevés de la Section H, la Droite HY Parallelement à DB, achevés le Quarré de CH, qui est égal au Rectangle HB.

DEMONSTRATION.

Car le Rectangle AF compris sous AG, GF égale à GC, avec le Quarré de EC est, par 6, égal au Quarré de EG ou de ED son égal, & les Quarrez de EC de CD, qui est CB par constr., sont, par 34, 1, égaux à celui de ED, & par égalité ces Quarrez de CD de EC sont égaux à celui de EC plus au Rectangle AF; par consequent ôtant de part & d'autre le Quarré de EC, le Quarré CB sera égal au Rectangle AF, & CY étant commun, le Rectangle HB compris sous HY, égale à la toute CD, & HD la plus petite de ses parties, sera égal au Quarré HG compris sous la plus grande; ce qu'il falloit faire & démontrer.





PROPOSITION XII.

THEOREME

SI du sommet B, du Triangle Ambligo-14 *fig.*
ne ABC, on abaisse la Perpendiculaire
BD sur le prolongement de sa base AC, je
dis que le Quarré du côté opposé à l'An-
gle obtus C, est égal à la somme des Quar-
rez des deux autres côtez AC, CB plus à
deux Rectangles compris sous AC, CD.

DEMONSTRATION.

Car le Quarré de AB est par 34, 1, égal
à ceux de DB, de AD, & par 4 le Quar-
ré de AD est égal à ceux de AC de CD
plus à deux Rectangles compris sous AC,
CD, & par égalité le Quarré de AB est égal
à ceux de DB, de AC, de CD plus à ces
mêmes Rectangles; d'ou il s'ensuit que,
substituant le Quarré de CB à la place des
deux de CD, de DB, celui de AB, opposé à
l'Angle obtus C, est encor égal à la somme
des Quarrés des deux autres côtés CA, CB,
plus à deux Rectangles compris sous AC,
CD; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIII.

THEOREME.

15. fig. **L**E Quarré du côté EF opposé à l'Angle Aigû G, d'un Triangle comme EFG, est égal à la somme des Quarrés des deux autres côtés, moins à deux Rectangles compris sous EG, HG, partie entre la Perpendiculaire FH & cet Angle Aigû G.

PREPARATION.

Faites le Quarré de EG, & coupés GC égale à GH, & tirés AC Parallelement à EG, & prolongés FH jusqu'en N.

Les figures O, V seront Quarrés des Lignes EH, HG, & les Rectangles Z, X seront égaux par les premières Proposit.

DEMONSTRATION.

Parce que le Quarré de EF est, par 34, 1, égal à ceux de EH, de HF, & que celui de EH, qui est O, est égal à celui de EG, qui est EK, moins à celui de HG, qui est V, plus les deux Rectangles, Z, X, il s'ensuit que, puisque celui de FG est, par 34,

34, 1, égal aux deux de FH de HG, celui de EF est aussi égal à ceux de EG, de GF moins à deux fois celui de HG plus Z, X, par consequent si à chacun des Rectangles égaux Z, X on ajoute le Quarré V, on aura évidemment deux fois le Rectangle AG compris sous EG, GC, égale à HG, desorte que substituant deux fois le Rectangle AG à la place de Z plus X plus deux fois le Quarré V, on aura raison de dire que le Quarré du côté EF est égal à la somme des Quarrez des deux autres côtez EG, GF moins à deux fois le Rectangle AG compris sous EG, GC égale à GH partie entre la Perpendiculaire FH & cet Angle Aigû G; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME

DEcrire un Quarré égal au Rectiligne donné ABE.

Plan-
che 2.
13 fig.

PREPARATION.

Décrivés par 31 & 32, 1 le Rectangle CD égal au Rectiligne donné, & continués DA de sorte que AF soit égale à AC, & du milieu H, de la Ligne FD, decrivés

74 E L E M E N S D E

de l'ouverture HF où HD, le demis Cercle FGD, & enfin continués CA jusqu'en G, & tirés HG., Je dis que la Droite AG est le côté du Quarré qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

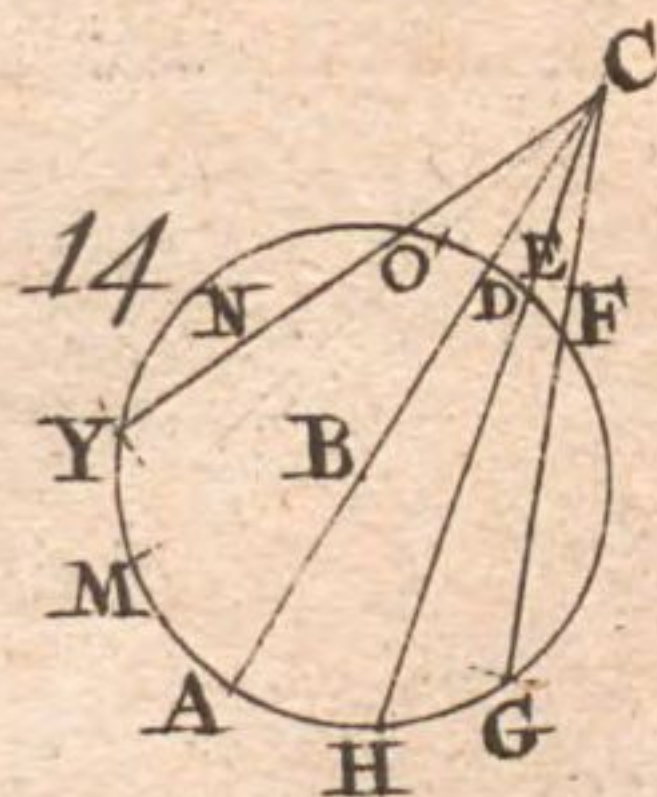
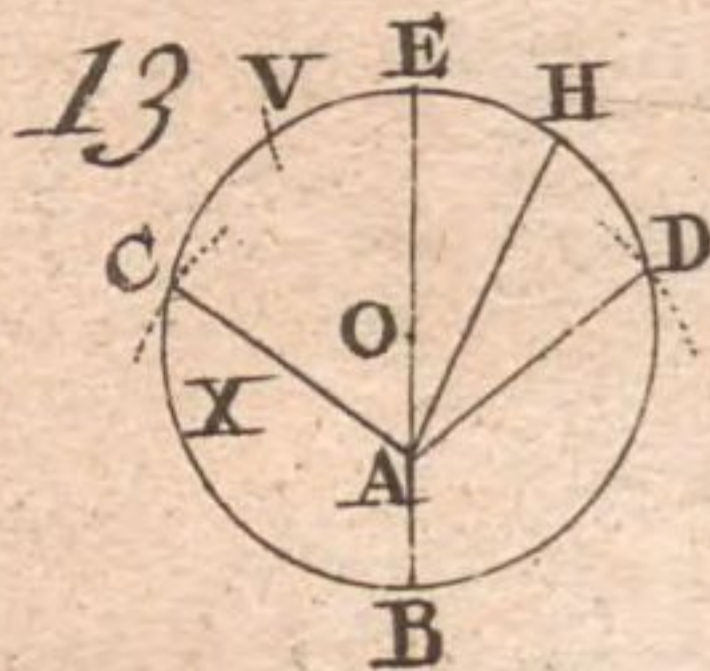
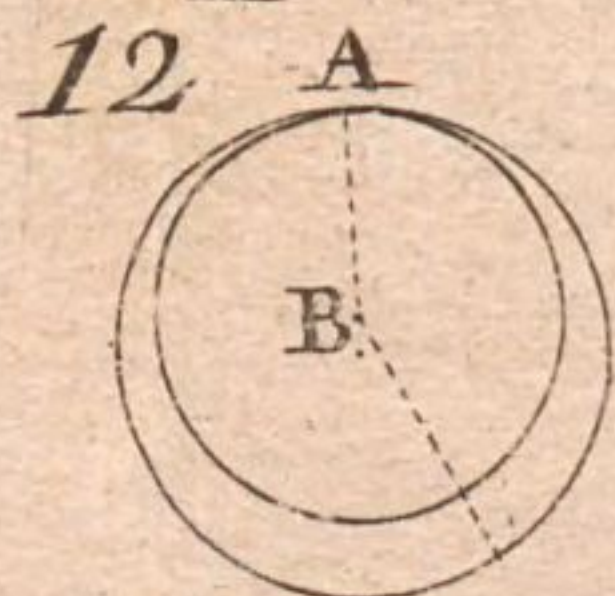
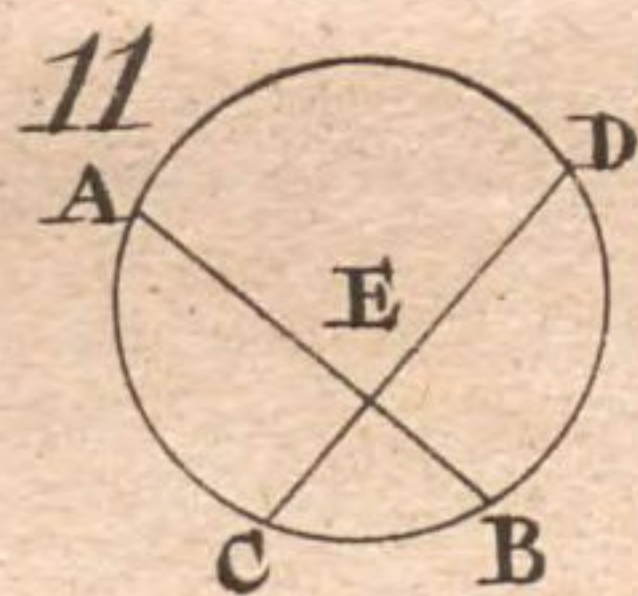
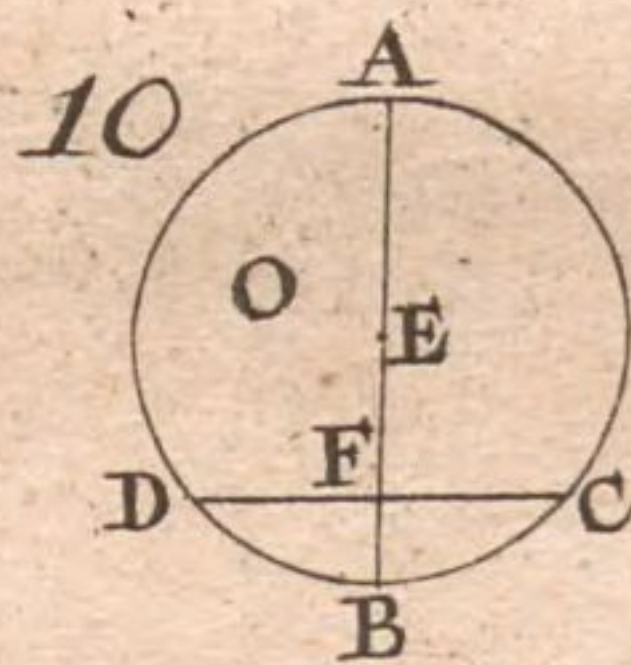
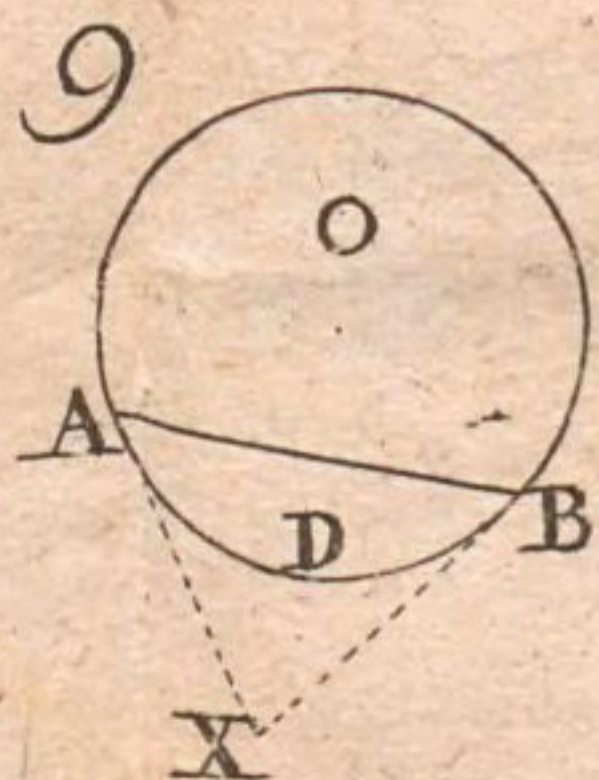
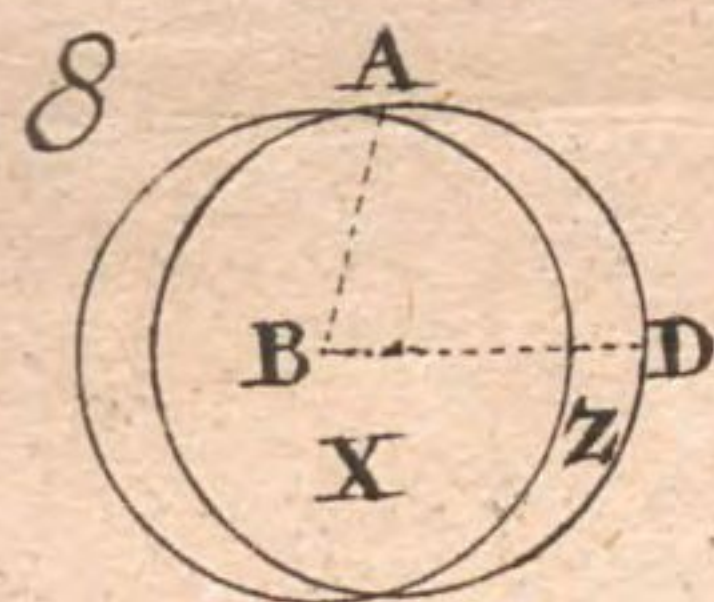
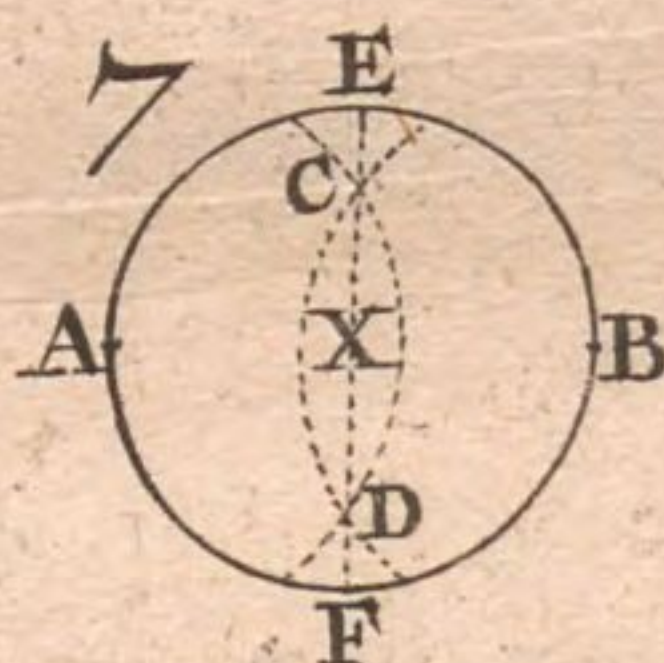
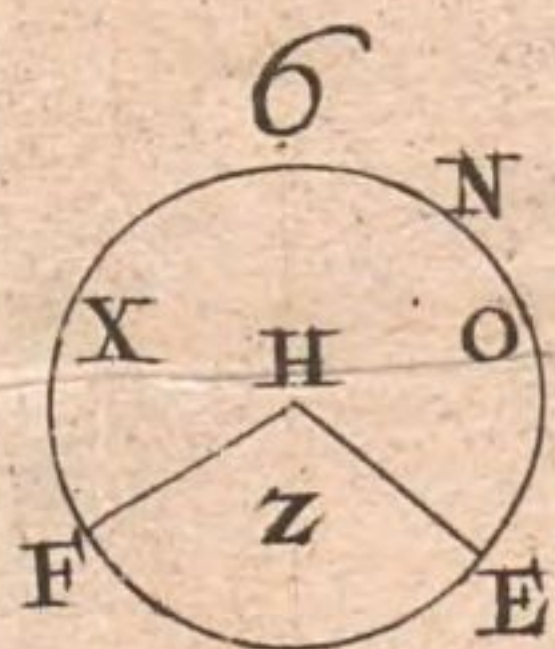
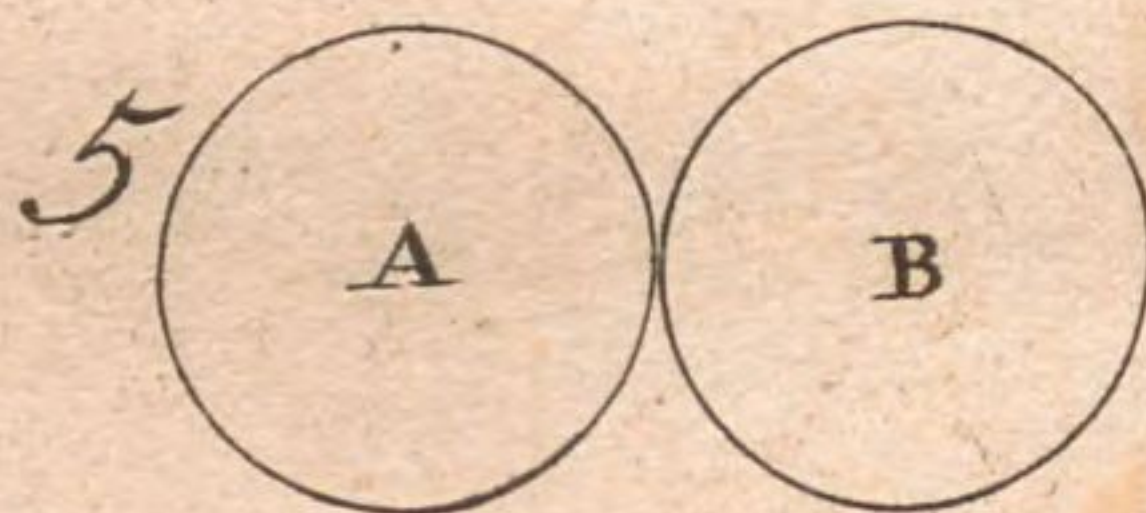
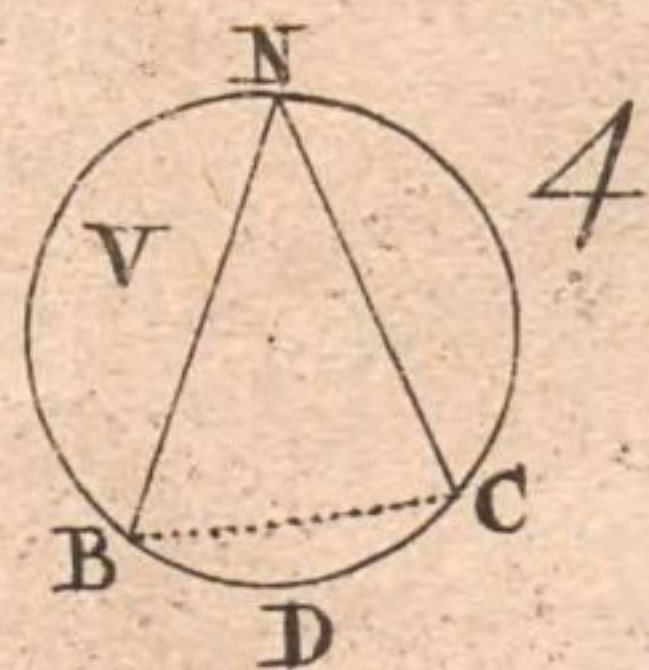
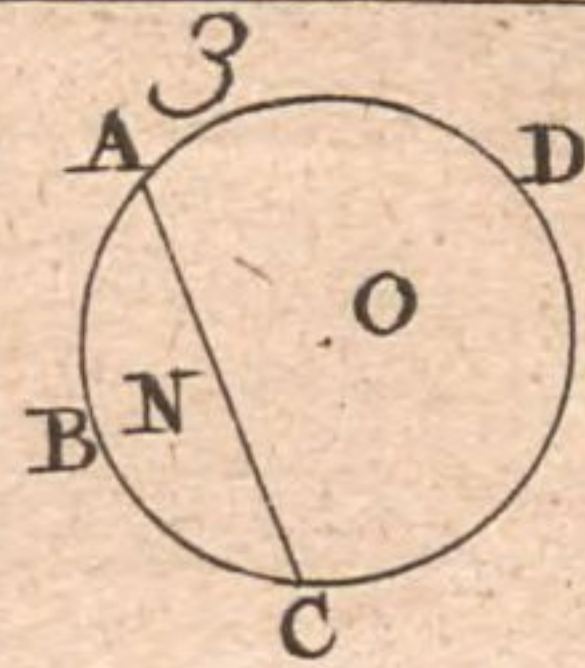
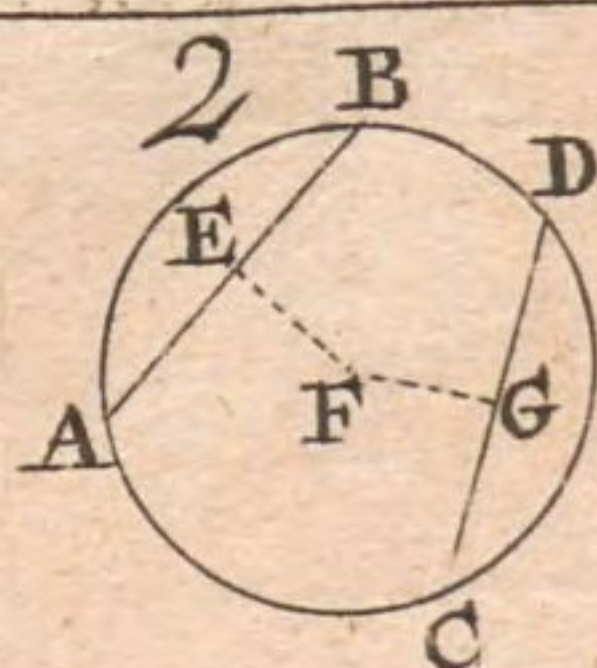
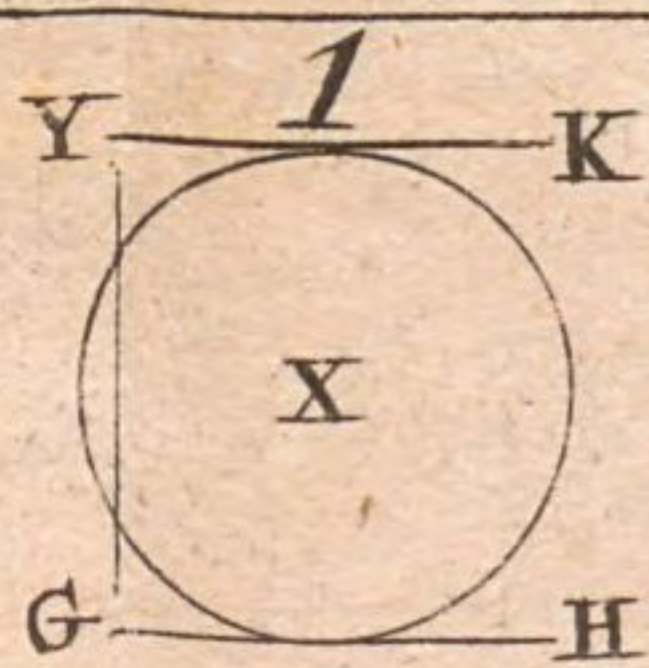
Car le Rectangle CD compris sous AD, AC égale à AF par constr. avec le Quarré de AH, est par 5, égal à celui de HD ou de HG qui par 34, 1 est égal à ceux de AG de AH, d'où on conclut que le Rectangle CD avec le Quarré de AH, est aussi égal à ce même Quarré de AH plus à celui de AG, & qu'enfin ôtant le commun de AH, le restant de AG, est égal au Rectangle CD, ou par égalité au Rectiligne donné ABE; ce qu'il falloit faire & démontrer.

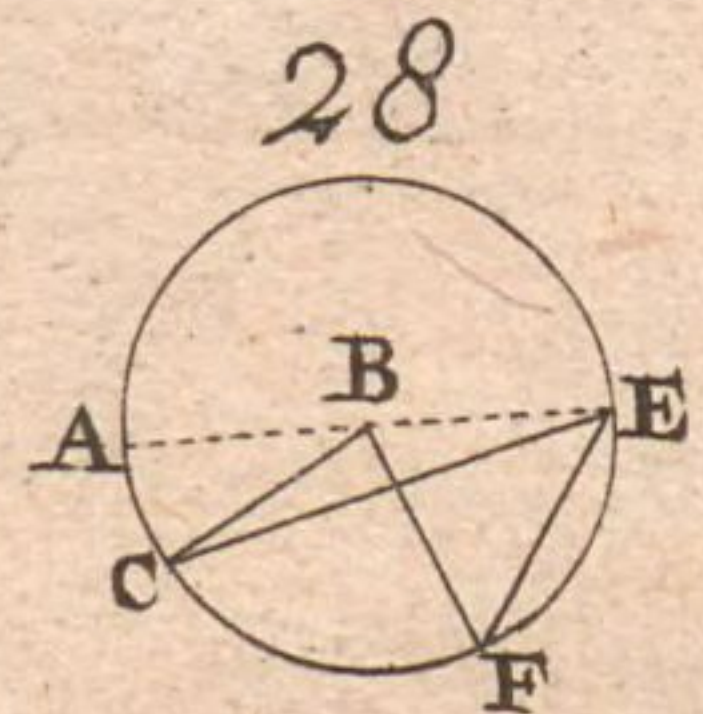
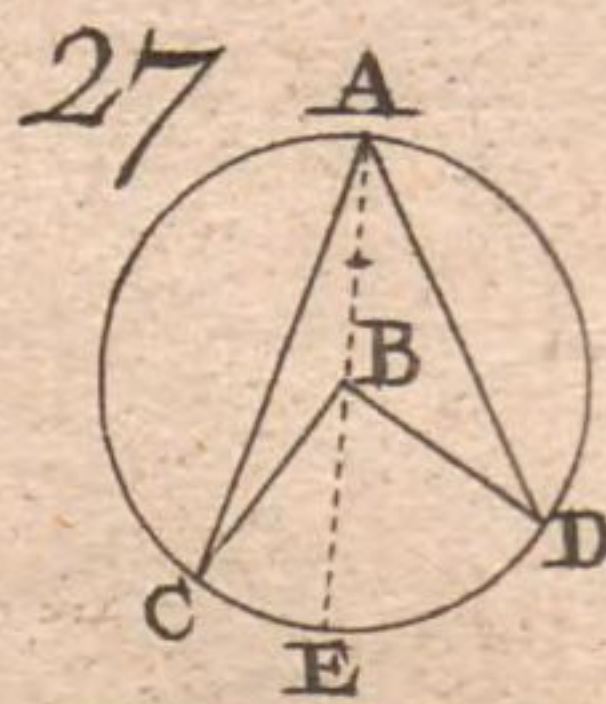
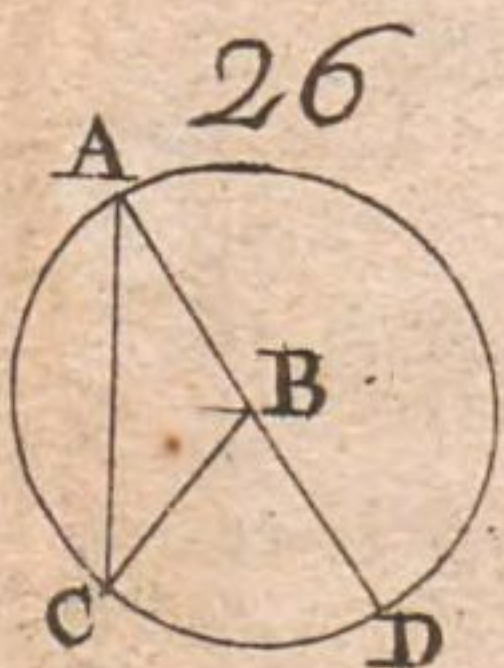
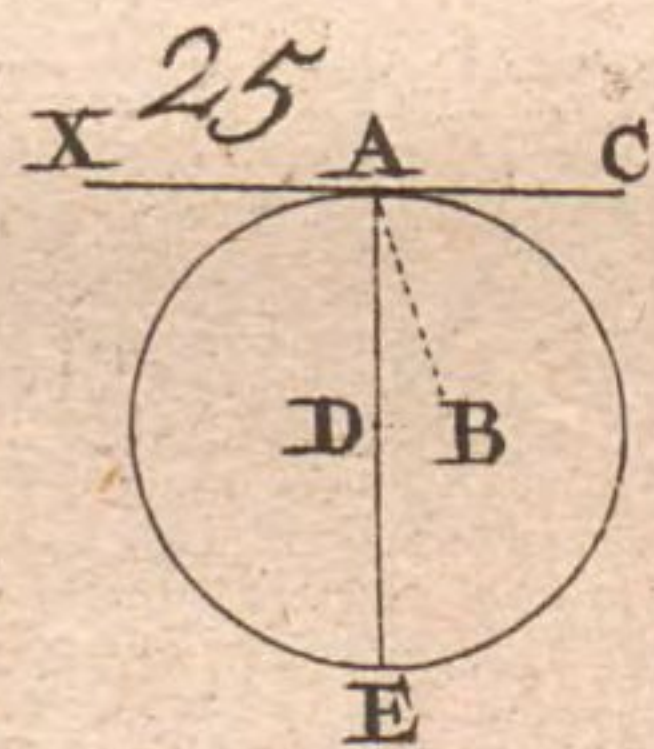
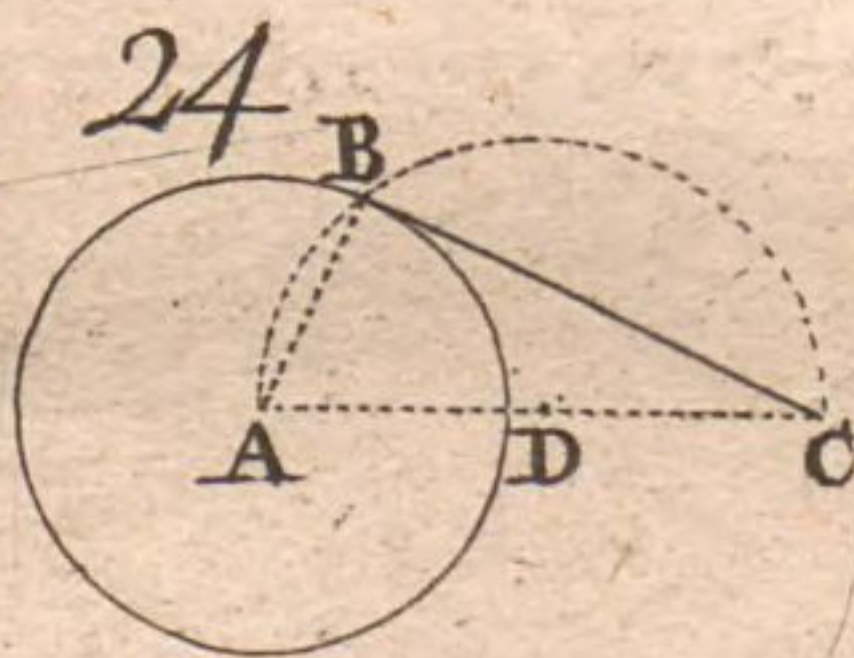
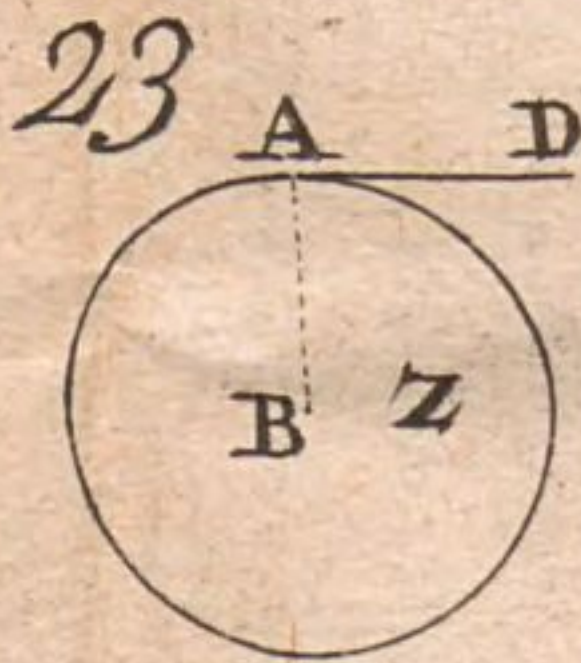
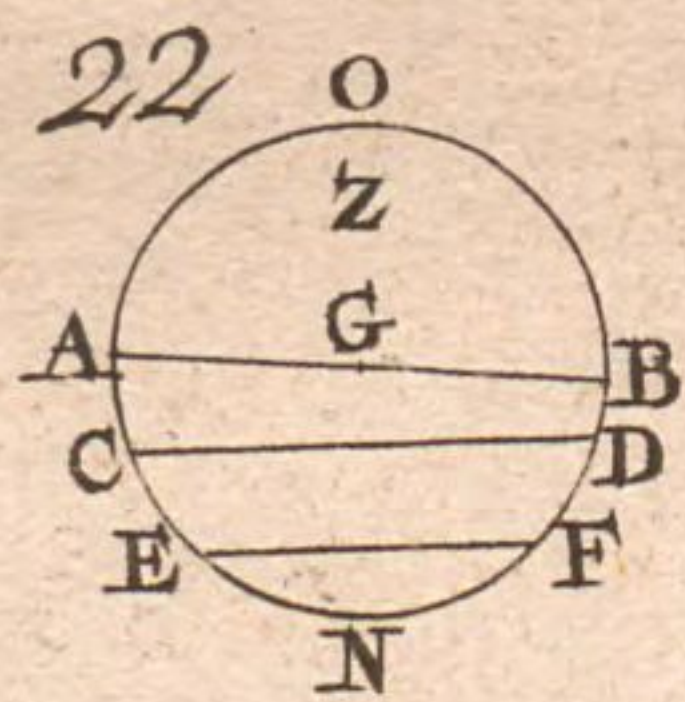
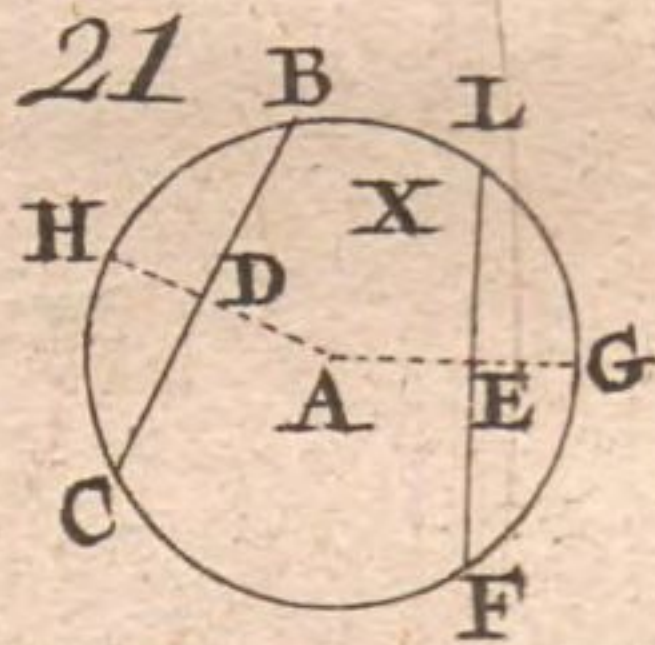
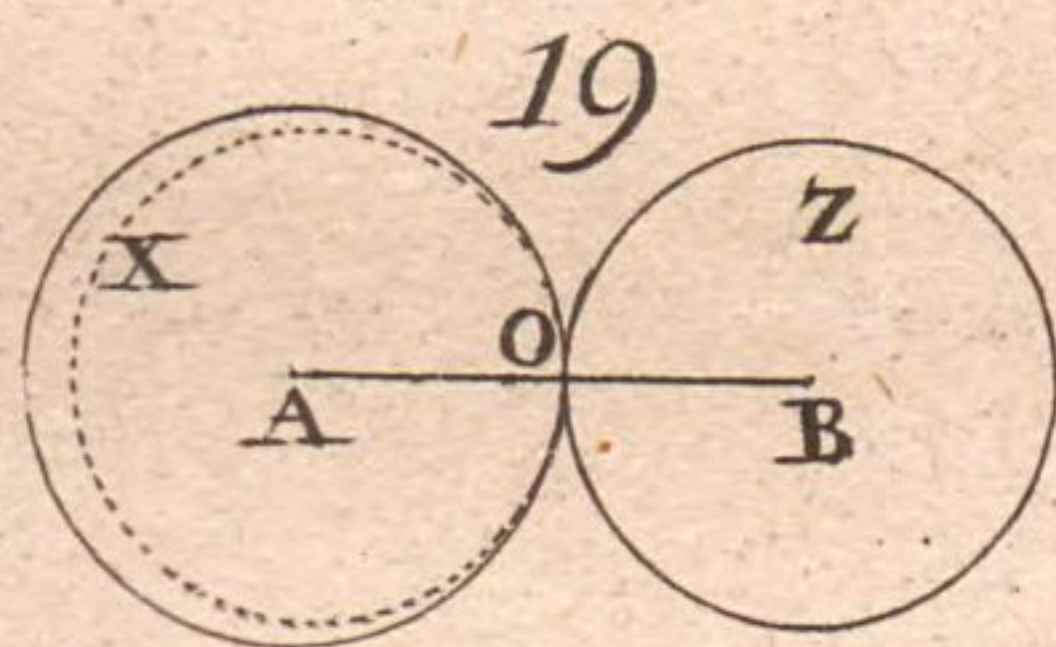
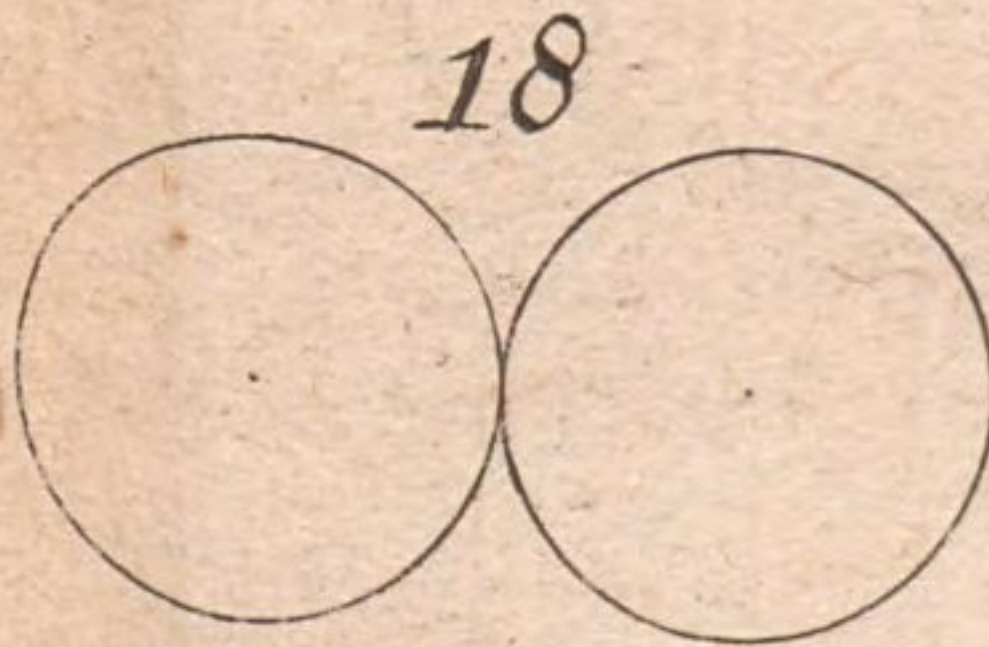
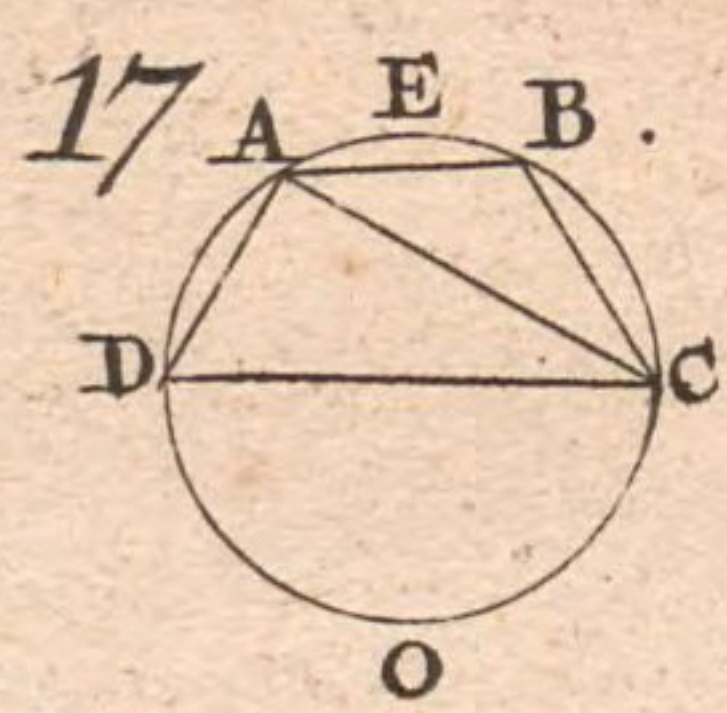
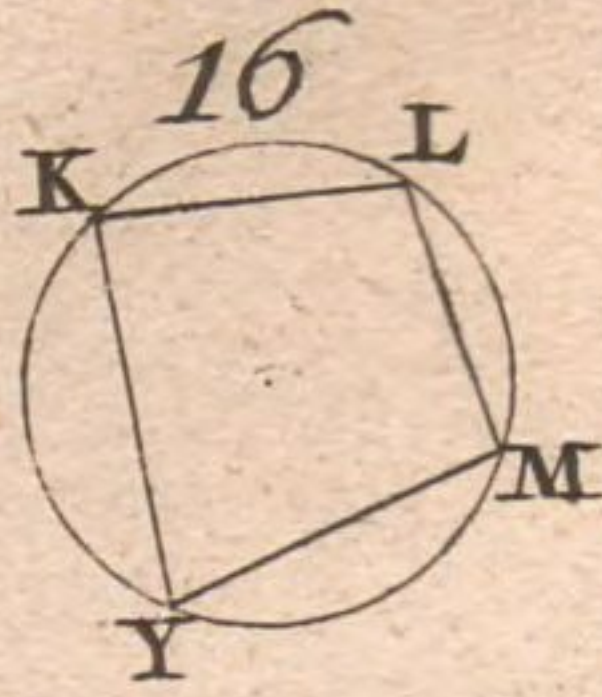
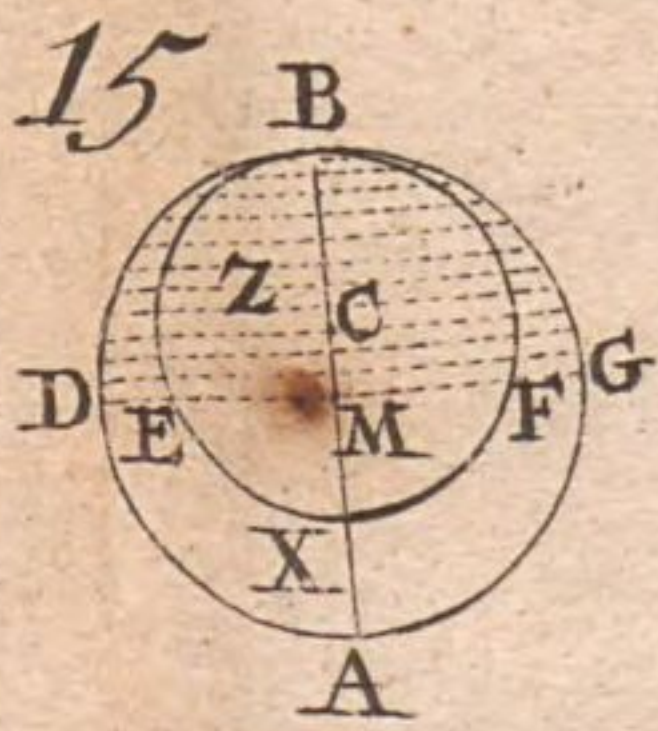
Fin du Livre second.



ELE-

Elemens de Geom. Liv. 3. Planche 1.

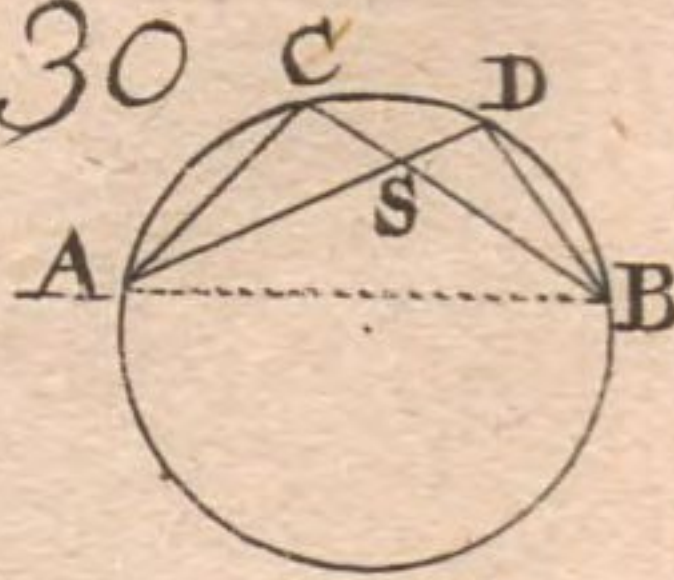




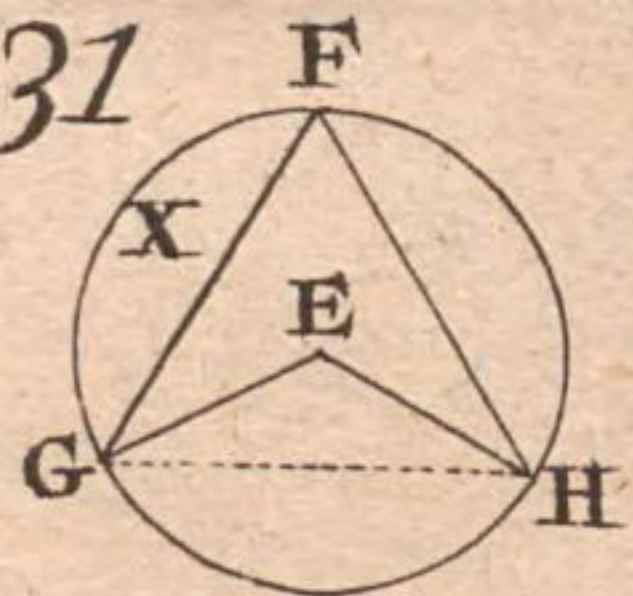
29



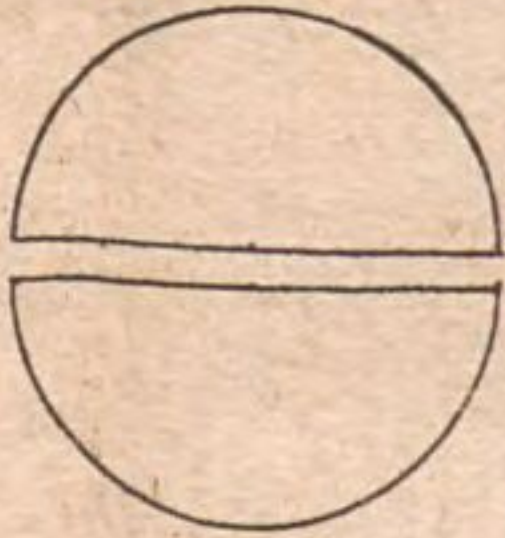
30



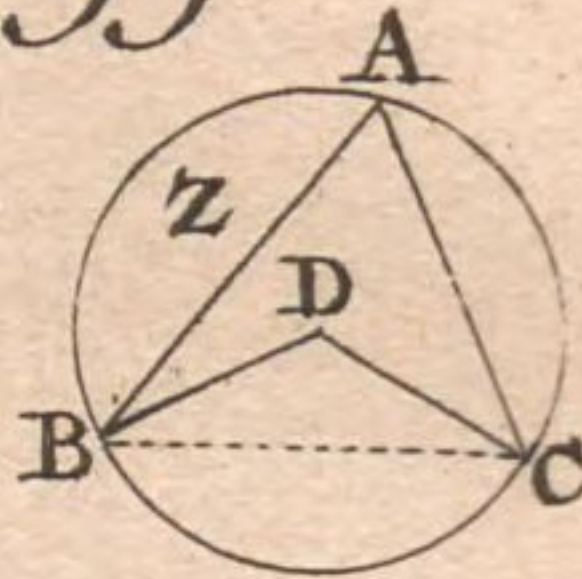
31



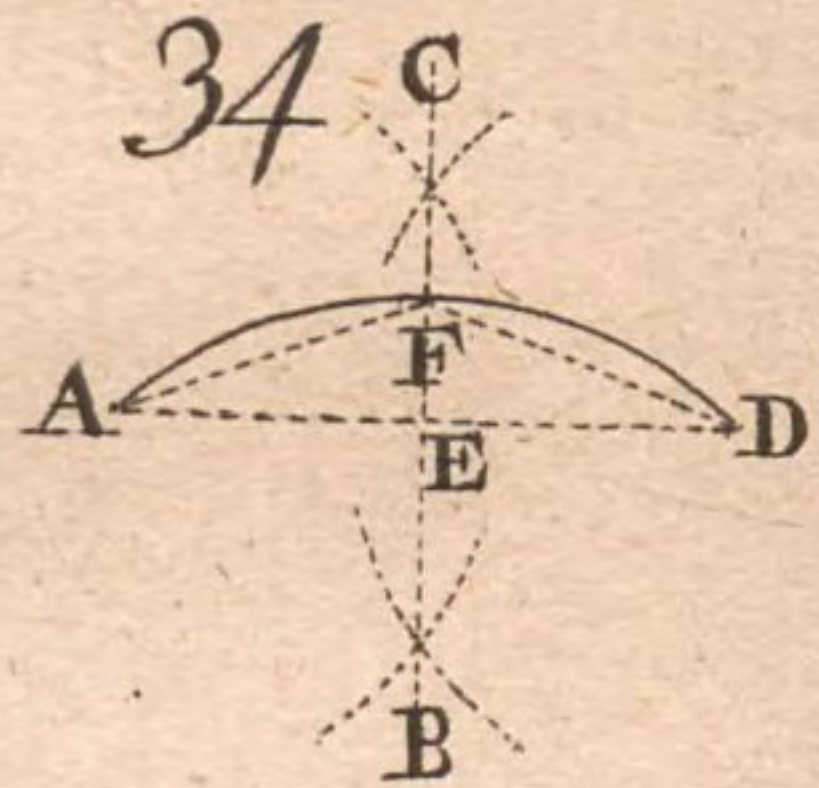
32



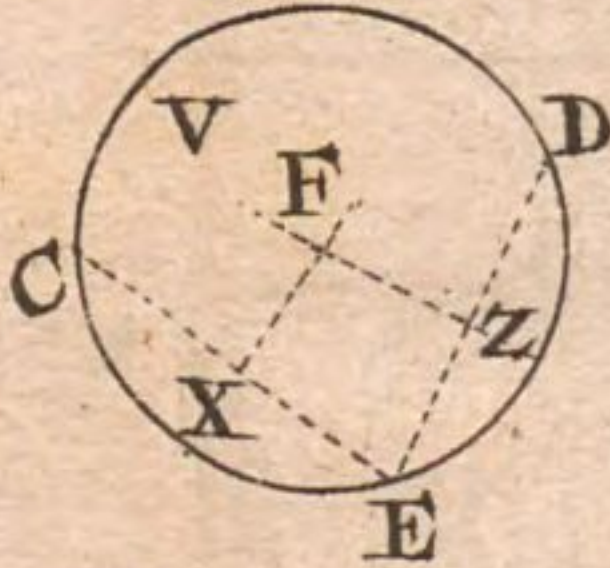
33



34



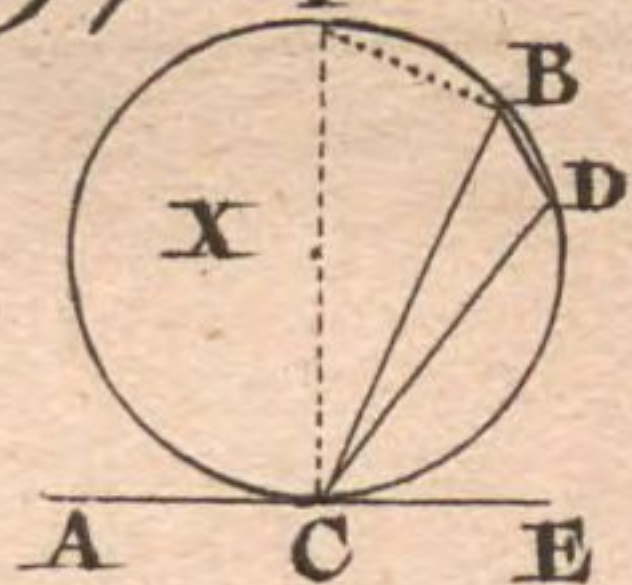
35



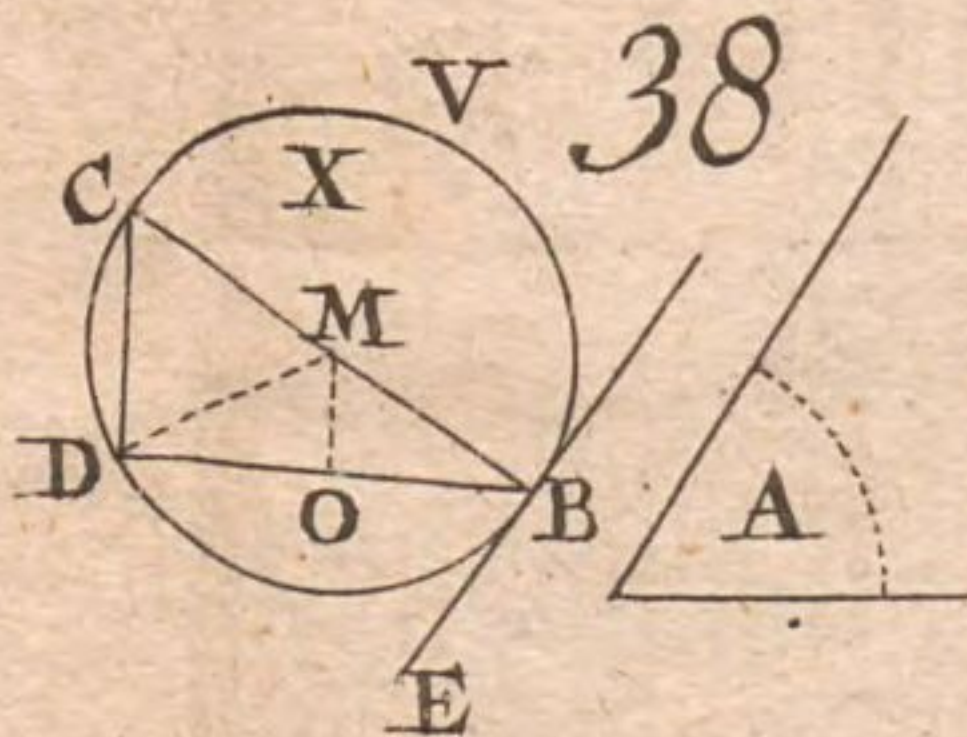
36



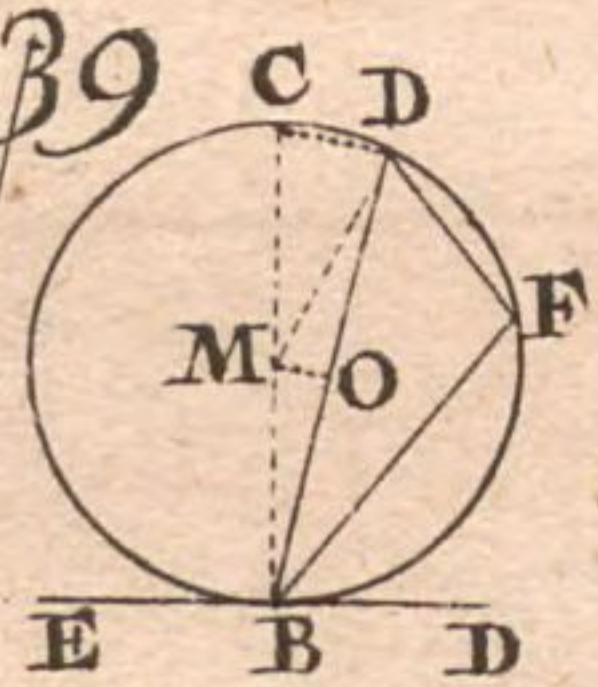
37



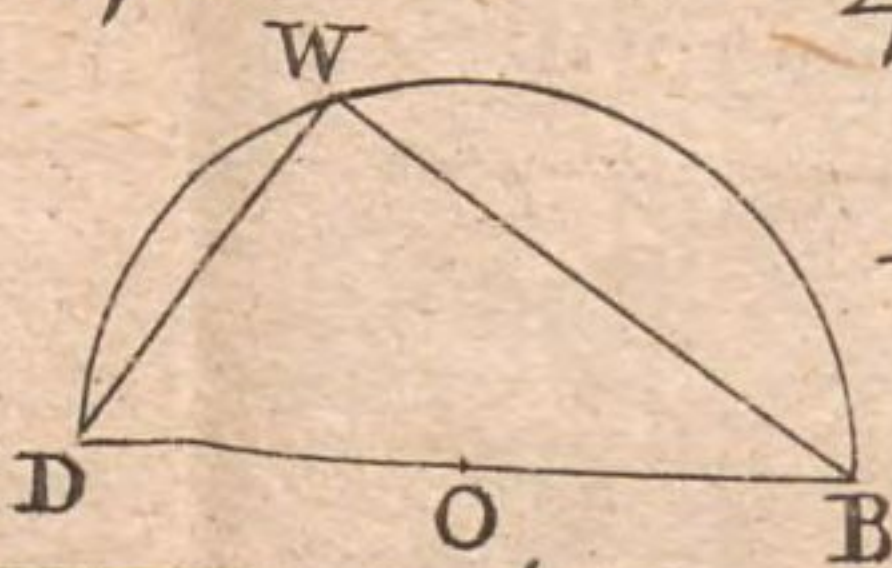
38



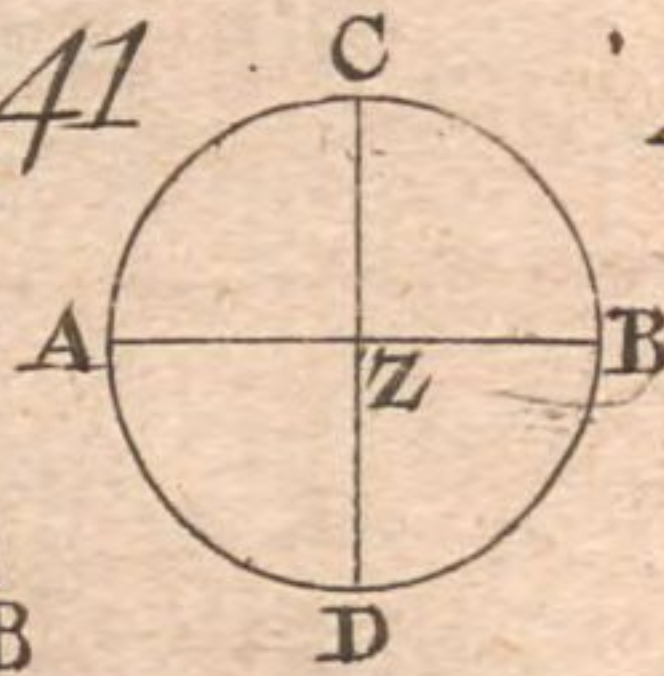
39



40



41



42





30



32

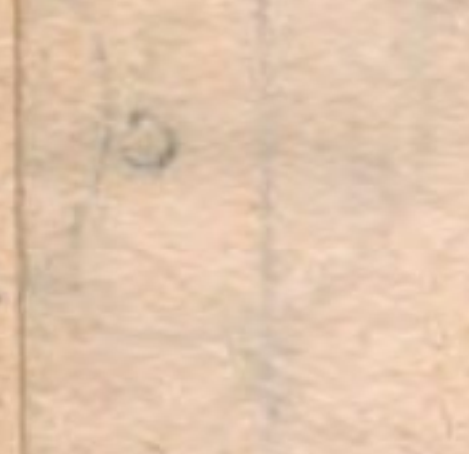
34



35

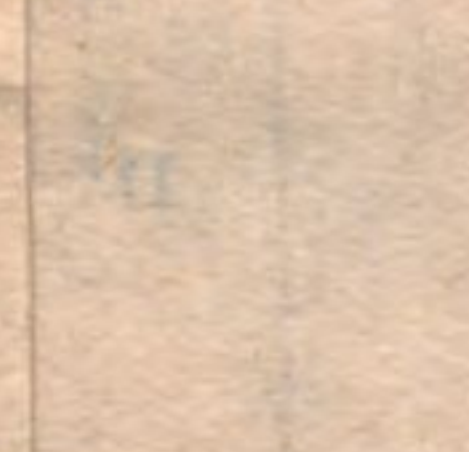
36

37



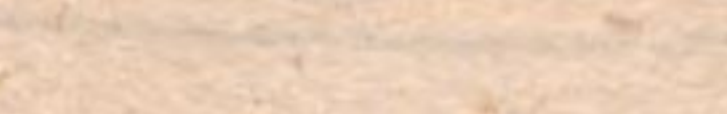
38

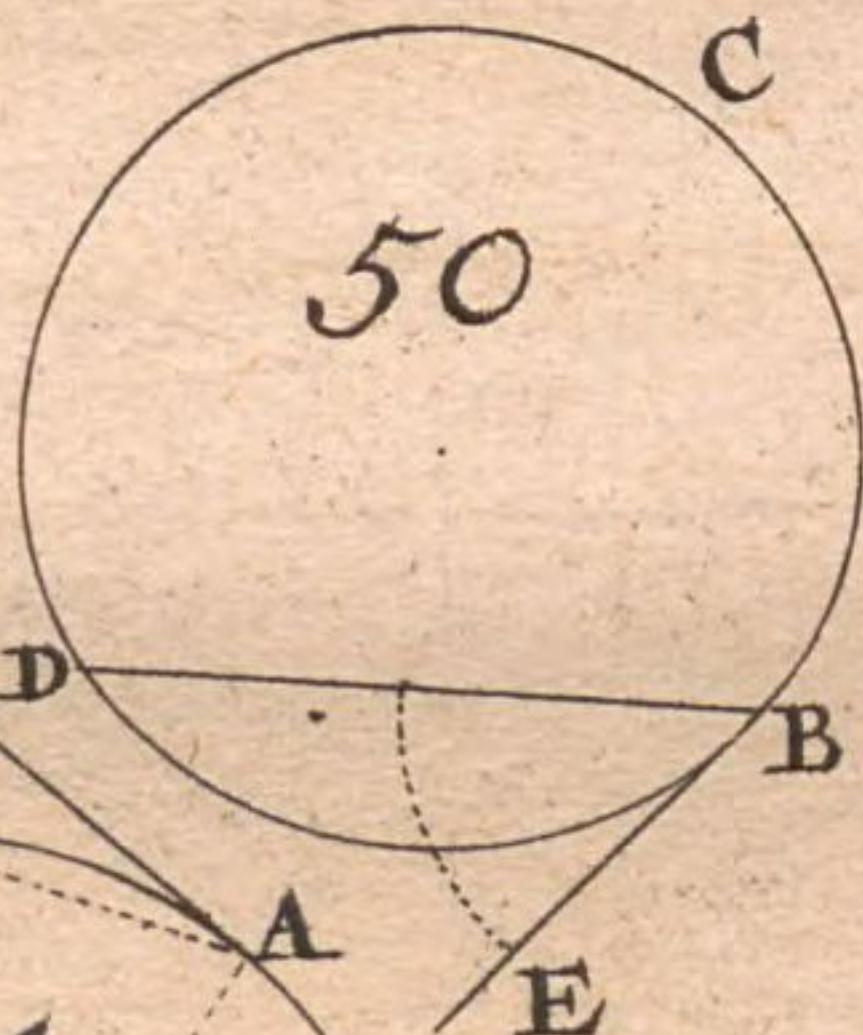
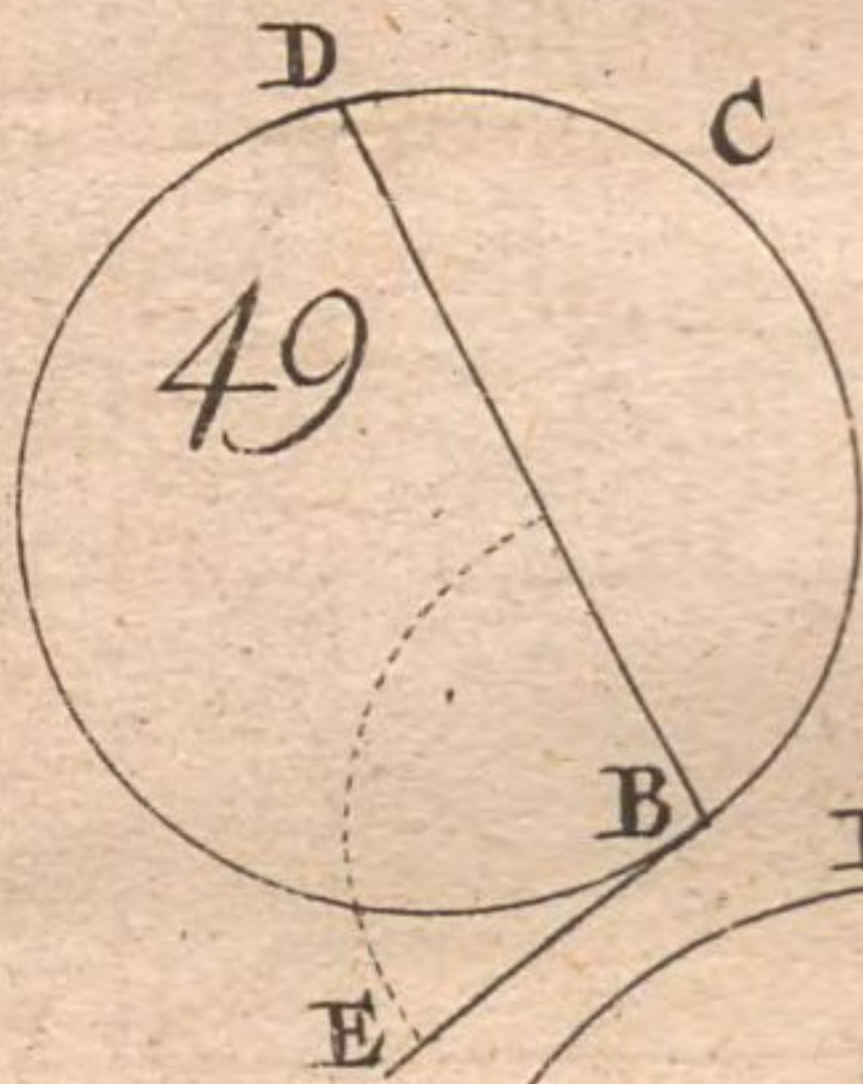
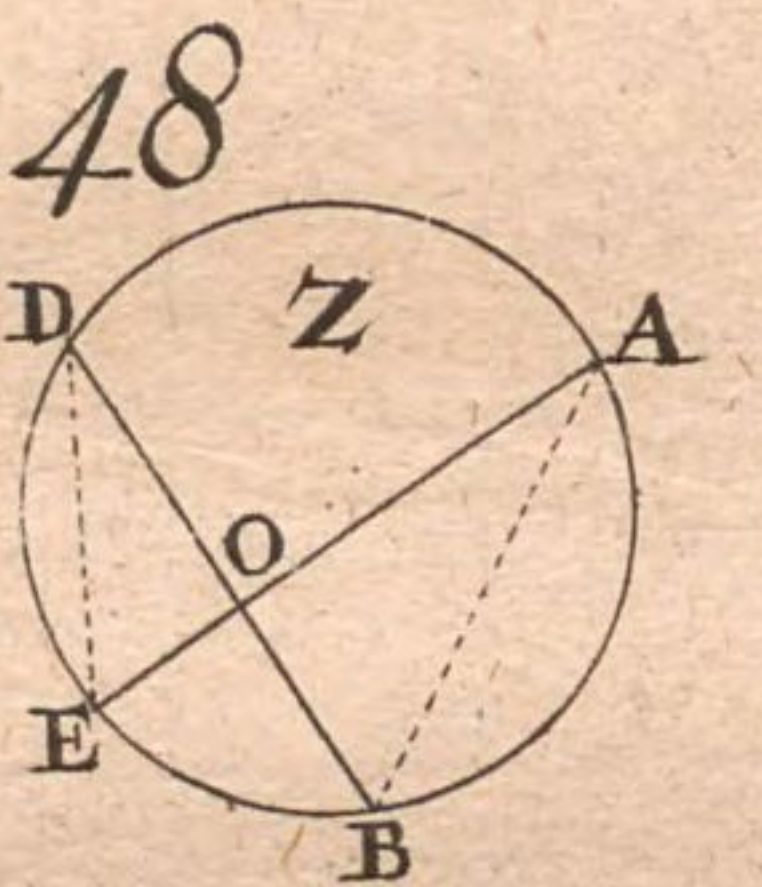
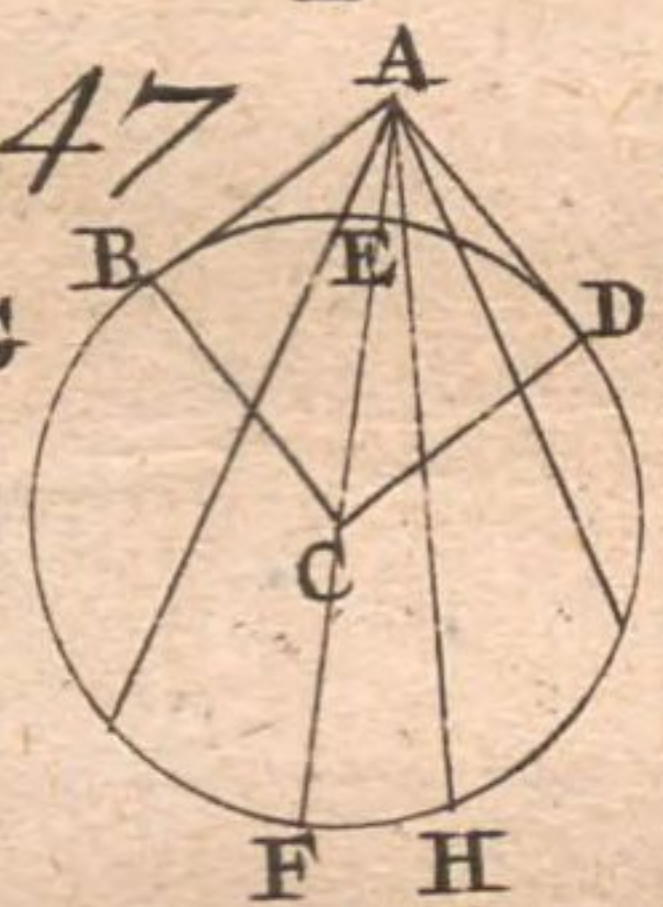
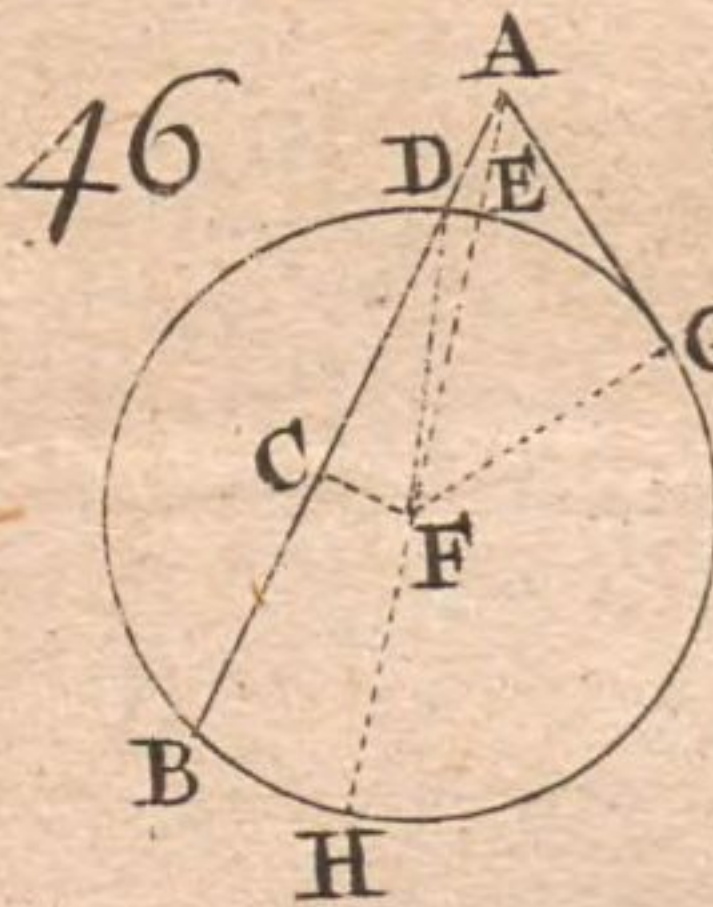
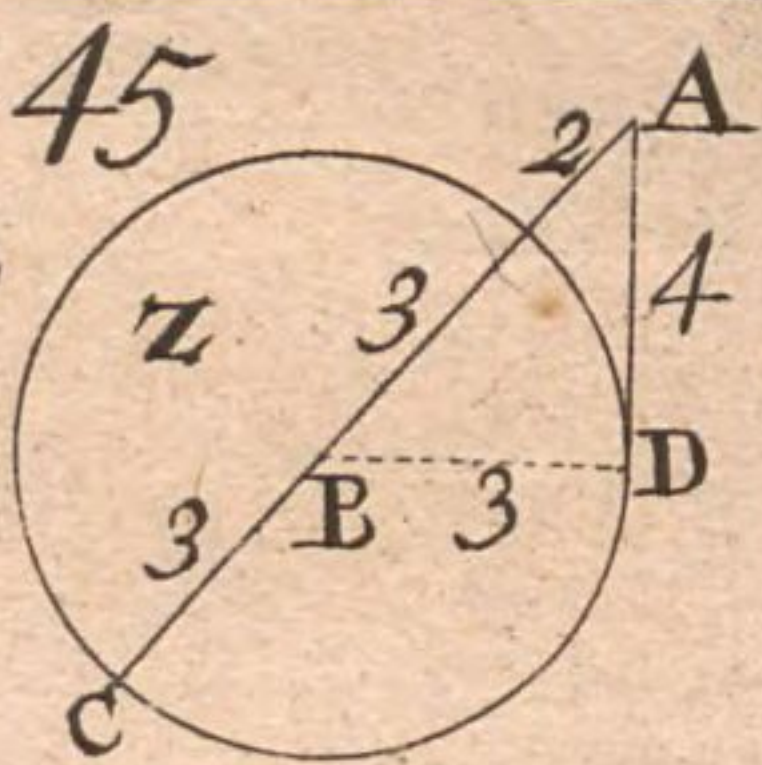
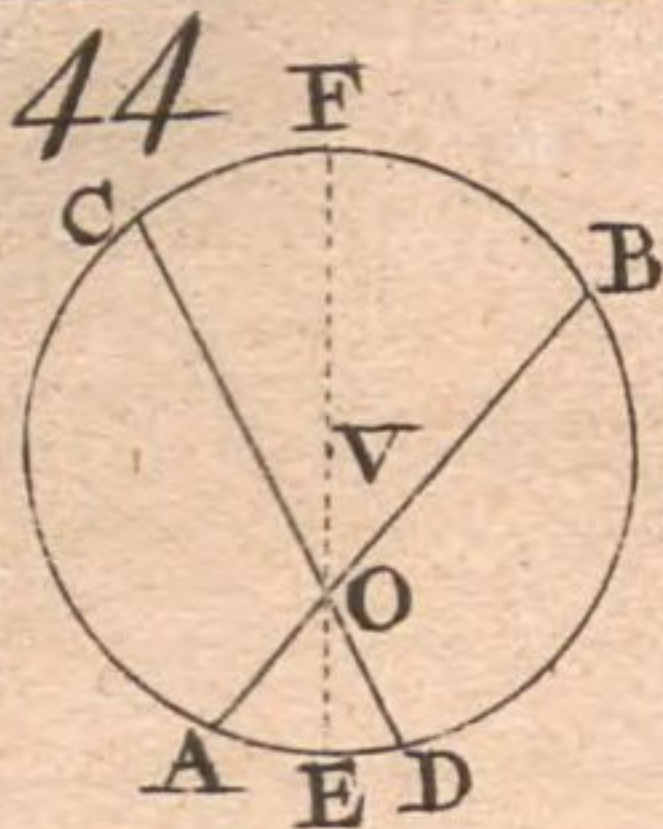
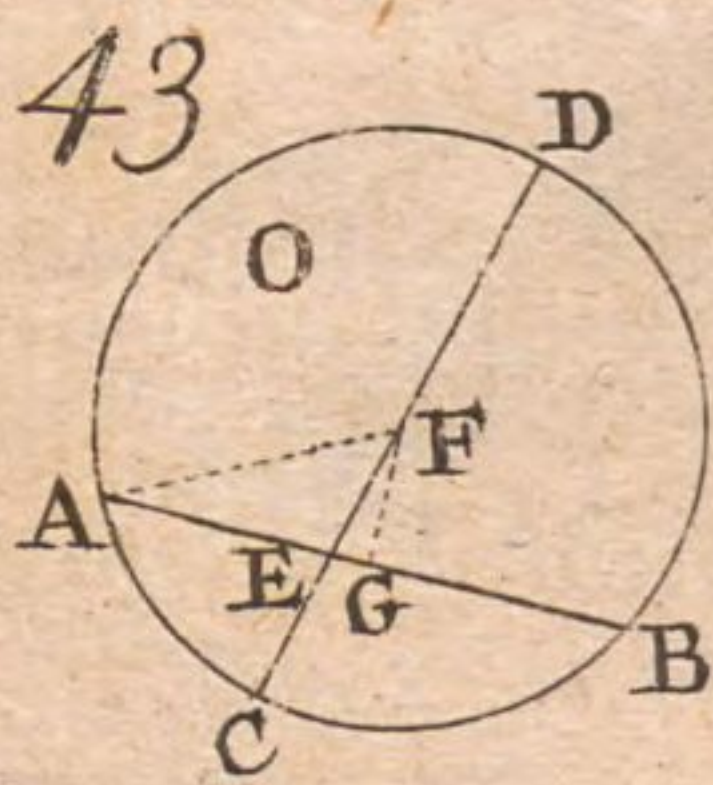
39



40

42









ELEMENTS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE TROISIEME

DE dessein d'Euclide dans ce Livre & de nous expliquer & démontrer les Propriétés variables de la Figure du Cercle, qui est la plus parfaite de toutes, & pour cela il compare divers Lignes qui se tirent tant au dedans qu'au dehors de sa circonference, puis considerant les circonstances des circonférences des Cercles, qui se coupent ou qui se touchent ou qui sont touchées par une Ligne Droite, il compare divers Angles

76 E L E M E N S D E

Angles qui se forment tant au centre qu'à la circonference du Cercle. Nous donnant les premiers Principes pour nous en servir ce qui est de grande utilité dans les Mathematiques.



D E F I N I T I O N S

I.

Les Cercles égaux ont leurs Diametres où Rayons égaux.

I I.

*Plan-
che I.
1. fig.*

On dit qu'une Ligne comme YK ou GH est touchante à un Cercle X, si elle ne le coupe Point ou si étant prolongée de part & d'autre elle n'entre Point dans ce Cercle &c.

I I I.

*même
figure.*

La Droite GY sera donc apellée coupante par ce qu'elle coupe le Cercle X.

I V.

5 fig.

On dit que des Cercle à, B se touchent lors qu'ils ne se coupent point.

V.

V.

Et que les Cercles X, Z sont Concen- *Liv. 1.*
triques, s'ils sont décrits d'un même Centre *Plan-*
Z, si non excentriques. *che 2.*

12 fig.

VI.

On dit que deux Lignes AB, CD sont *Liv. 3.*
également éloignées du Centre F, lorsque *Plan-*
les Perpendiculaires EF, FG tirées de ce *che 1.*
Centre, sont égales entr'elles. *2. fig.*

VII.

Les Figures N, O sont apellées Segmens *3 fig.*
ou portions de Cercle, parce que chacune
est comprise sous une partie de la circon-
ference du Cercle ON & la Droite CA qui
à ses extrémités à la circonference de ce
Cercle.

VIII.

L'Angle Mixte ACD ou CAD est apel-
lé Angle du Segment, CDA, comme auf- *même*
si l'Angle BCA ou BAC du Segment CBA. *figure.*

IX.

On dit qu'un Angle CNB est dans le
Segment BCN, lorsqu'ayant sa Pointe N
dans l'Arc CBN, les côtez qui le compren- *4. fig.*
nent ont pour extrémités celles de la Droite
BC qui sert de bāse à ce Segment BCN.
X.

X.

*même
fig.*

Et que l'Angle BNC est dessus ou repose sur l'Arc BDC parce que cet Arc lui est opposé.

X I.

6 fig.

Les Figures X, Z sont apellées Secteurs de Cercle, parce que chacune est terminée par les Rayons EH, HF, & les parties FNE, FE du circuit du Cercle O.

X I I.

*Plan-
che 2.
16 fig.*

On dit qu'une figure Rectiligne YKLM est inscrite dans un Cercle, lorsque les Pointes de tous ses Angles, sont à la circonference de ce Cercle.

X I I I.

Et qu'une Ligne Droite est appliquée à un Cercle, lorsque ses extrémités sont à la circonference de ce Cercle, ou lorsque la circonference de ce Cercle, passe par les extrémités de cette Ligne.





PROPOSITION I.

PROBLEME.

Trouver le Centre du Cercle donné X. *Plan-*

che I

PREPARATION.

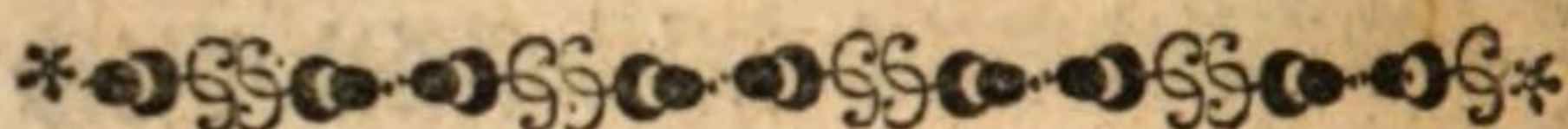
7 fig.

Des deux Points A, B, pris dans la circonference, decrivés d'une même ouverture de Compas deux Arcs de Cercles, & tirés par leurs Sections C, D la Droite EF que vous diviserés en deux également au Point X, lequel Point X je dis être le Centre de ce Cercle.

DEMONSTRATION

Car les deux Points C, D étant par Déf. 1, également éloignés des deux Points A, B, on conclut évidemment par la Déf. 4. du Liv. 1, que ce Cercle est divisé en deux parties égales par la Droite EF, & que par conséquent cette Droite EF en est le Diametre, & que le milieu X en est le Centre; ce qu'il falloit démontrer.

PRO-



PROPOSITION II.

T H E O R E M E.

9 *fig.* **T**oute Ligne Droite comme AB dont les extrémités sont à la circonférence du Cercle O est entièrement dans ce Cercle.

DEMONSTRATION.

Car ce ne peut-être ADB, ni encore moins AXB, parce que ce ne peut-être autre que AB par la Déf. 4. du Liv. 1; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

D'ou il suit qu'une Ligne Droite ne peut toucher la circonférence d'un Cercle qu'en un Point, puisque si elle la touchoit en deux, elle la couperoit, & entreroit par conséquent au dedans du Cercle, donc&c.



PRO-



PROPOSITION III.

THEOREME.

SI le Diametre AB divise la Ligne CD *plan-*
 en deux également en F, je dis qu'il la *che i.*
 coupe à Angles Droits, & qu'enfin s'il la *io fig.*
 coupe à Angles Droits, il la divise en deux
 également.

DEMONSTRATION

Parce que le Point E est également éloi-
 gné des Points C, D par Défin. du Cercle,
 & que F est le milieu de la Ligne CD, par
 supp., il s'ensuit par la Défin. ii. du Liv. i.
 que FE ou FA est Perpendiculaire à CD,
 & que par consequent les Angles CFA,
 AFD sont Droits; ce qu'il falloit démon-
 trer.

DEMONSTRATION.

Parce que le Point E est également éloi-
 gné des Points C, D, par Défin. du Cer-
 cle, & que AF est Perpendiculaire à CD
 par supp., il s'ensuit évidemment par la
 Défin. ii du Liv. i., que la Droite CD
 F est

est divisée en deux également en F par la Ligne EF ou par le Diametre AB; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION IV.

T H E O R E M E.

II. fig. **L** Es Lignes AB, CD qui ne passent, pas par le Centre E, ne peuvent se couper en deux également.

DEMONSTRATION.

Car si elles se coupoient en deux également leur Point de Section seroit évidemment le Centre de ce Cercle, ce qui suffit.





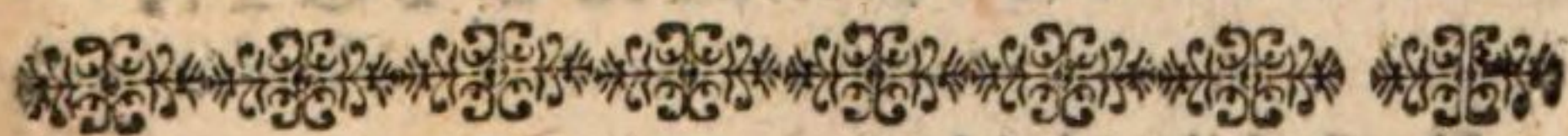
PROPOSITION V.

THEOREME.

LEs Cercles X, Z qui se coupent ne peuvent être concentriques.

DEMONSTRATION.

Car s'ils l'étoient, ils conviendroient par 8 *fig.* la suite de l'Axiome 8. du Liv. 1, s'ils étoient décrits d'une même Ouverture BA, d'où il s'ensuit que BD ne peut-être égale à BA, & que par conséquent le Point B n'est pas le Centre du Cercle Z; & qu'enfin les Cercles X, Z ne sont pas concentriques; ce qu'il falloit démontrer.

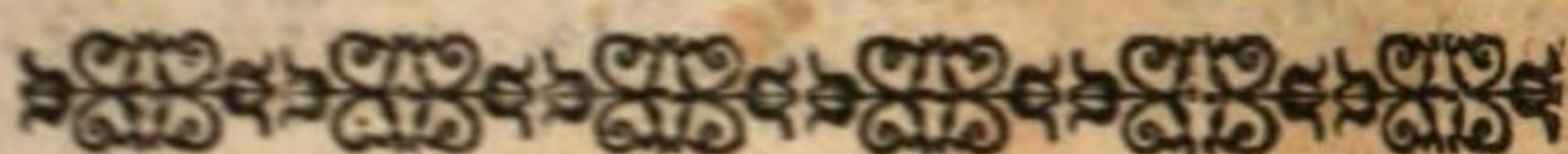


PROPOSITION VI.

THEOREME.

LEs Cercles qui se touchent ne sont pas concentriques. 12 *fig.*

C'est ce qui est très évident par la précédente.



PROPOSITION VII.

T H E O R E M E.

13 fig. **S**I du Point A, autre que le Centre O, pris à volonté dans le Cercle X, on tire plusieurs Lignes à sa circonference.

Je dis que la Ligne ou partie AE du Diametre BE est la plus grande & que le reste ou la Ligne BA est la plus petite.

Et que la Droite AH qui est la plus proche de cette partie AE est plus grande qu'une Ligne quelconque AD, qui en est plus éloignée.

Et que de ce même Point A, on ne peut tirer à la circonference de ce Cercle que deux Lignes Droites égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident que cette partie AE est plus grande que le reste AB, & que de tous les Points de la circonference du Cercle X, il n'y en a pas de si éloigné du Point A, que le Point E, & que par conséquent cette partie AE est plus grande qu'une Ligne quelconque AH &c.; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce qu'il est évident que, de tous les Points de la circonference du Cercle X, il n'y en a pas de si proche du Point A que le Point B, il s'ensuit que le reste ou la Ligne BA, du Diametre BE, est plus petite que la Ligne AC ou toute autre; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Si vous coupés l'Arc EV égal à l'Arc EH, vous connoîtrez évidemment, par les raisons précéd., que de tous les Points de l'Arc VBH il n'y en a pas de plus éloigné du Point A que le Point H, & que par conséquent la Ligne AH est plus grande qu'une Ligne quelconque AD qui est plus éloignée de la partie AE, du Diametre BE, que cette Ligne AH; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Si du Point A on décrit de l'Ouverture de Compas AC les deux Arcs de Cercles C, D on connoitra évidemment par sa Définition., que les Droites AC, AD, qui joignent les Points A, C. A, D, sont égales entr'elles, & que, comme les Lignes tirées du Point A à la circonference du Cercle X, sont plus grandes que AD, ou
F 3
que AC

que AC, si elles approchent plus de AE que celles-ci, ou plus petites, si elles en sont plus éloignées, il s'ensuit que du Point A on ne peut tirer, à la circonference du Cercle X, que deux Lignes Droites, comme AC, AD, égales entr'elles; ce qui restoit à démontrer.

C O R O L L A I R E.

D'où il suit que si d'un Point pris dans un Cercle, on peut mener trois Lignes égales à sa circonference, ce Point en est le Centre.



P R O P O S I T I O N V I I I.

T H E O R E M E

Plan-
che 1.
14. fig.

SI du Point C pris à volonté hors du Cercle N, on tire plusieurs Lignes à sa circonference concave.

Je dis que CA qui passe par le Centre B est la plus grande de toutes.

Et que celle qui en aproche le plus est aussi la plus grande de toutes celles qui en sont plus éloignées.

Et que si la Ligne CD étant prolongée passe par le Centre, elle est la plus petite de celles tirées à la circonference convexe.

Et

Et qu'enfin la Droite CE qui est plus proche de cette plus petite CD est aussi plus petite que la Ligne CF qui en est plus éloignée.

DEMONSTRATION.

Parce qu'il est évident, que de tous les Points de la circonference du Cercle N, il n'y en a pas de si éloigné du Point C; que le Point A, il s'ensuit que la Droite CA qui passe par le Centre B, est la plus grande de toutes les Lignes tirées du Point C à la circonference concave du Cercle N; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

Si vous faites l'Arc AM égal à l'Arc AH, vous connoîtrez aisément par les raisons précéd., que de tous les Points de l'Arc MDH, il n'y en a pas de plus éloigné du Point C, que le Point H, & que par consequent la Droite CH est plus grande que la Droite CG, ou toute autre qui est plus éloignée de la Ligne CA que cette Droite CH; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Il est évident que le Point D, est plus proche du Point C, qu'aucun des Points de la Circonference du Cercle N, & qu'ain-

si la Droite CD est plus petite que la Ligne CE ou CF &c.; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

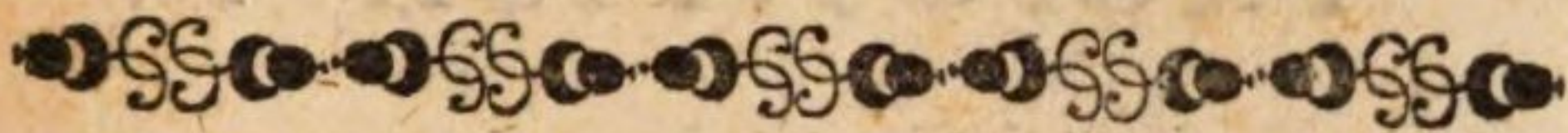
Si vous coupés l'Arc DO égal à l'Arc DE, vous connoîtrez évidemment, par les raisons précéd., que de tous les Points de l'Arc OAE, il n'y en a pas qui soit plus proche du Point C que le Point E & que par conséquent la Droite CE, qui est plus proche de la ligne CD, est plus petite que la Droite CF qui en est plus éloignée; ce qui restoit à démontrer.

J'ajoute, que de ce Point C on ne peut tirer que deux Lignes Droites égales entr'elles, tant à la circonference convexe qu'à la concave.

DEMONSTRATION.

Car si de ce Point C, on décrit de l'ouverture CO les Arcs O, F & de l'ouverture CY les Arcs Y, G on connoitra que les Droites CY, CG sont égales entr'elles par Défin. du Cercle, aussi bien que les Droites CO, CF par les mêmes raisons, & que, comme celles tirées de ce Point C, à la circonference concave, sont plus grandes que CG ou CY, si elles approchent plus de CA, ou plus petites, si elles en sont plus éloignées, & que comme celles tirées à la convexe sont, ou plus petites

tites ou plus grandes que CO, ou CF, il s'enfuit qu'on n'en peut tirer que deux égales, tant à la circonference convexe qu'à la concave; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IX.

THEOREME.

DEux circonférences de Cercles se coupent seulement en deux Points. *planche 1. 8 fig.*

DEMONSTRATION.

Car si elles se coupoient en trois, les Cercles X, Z dont elles sont circonférences auroient, par le Coroll. de la Prop. 7, un même Centre, ce qui feroit contre la 5; &c.





PROPOSITION X.

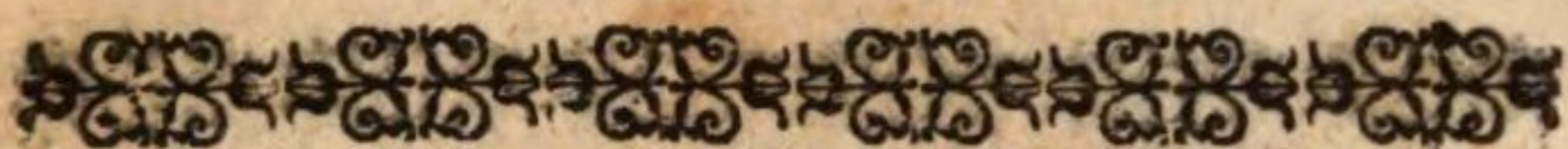
T H E O R E M E.

*Plan-
che 2.
15. fig.* SI les deux Cercles Z, X se touchent en B, je dis que la Ligne AB tirée par leurs Centres M, C passe par le Point d'attouchement B.

DEMONSTRATION.

Car si par la pensée on fait passer Perpendiculairement par tous les Points du rayon MB du Cercle X des Lignes ponctuées, on connoîtra aisément par la seconde partie de la Prop. 3. que toutes ces Lignes ponctuées sont divisées en deux également par ce rayon MB aussi bien que leurs parties qui sont dans le Cercle Z, & par l'Axiome 5. du Liv. 1. que les parties d'une part qui sont hors de ce Cercle Z sont égales aux parties de l'autre part, c'est-à-dire que la partie DE est égale à la partie FG, & ainsi ensuite jusqu'au Point B; d'où il est aisé de conclure que les deux Cercles X, Z ne peuvent se toucher en deux Points, & que le Point B est ce Point d'attouchement par lequel on a dit que la Ligne AB, tirée par les Centres M, C, passoit; ce qu'il falloit démontrer.

P R O.



PROPOSITION XI.

THEOREME.

SI les circonferences des deux Cercles 19. *fig.* Z, X se touchent par le dehors, je dis que la Droite AB, qui joint leurs Centres, passe, par le Point d'attouchement O.

DEMONSTRATION.

Car si par la pensée vous repliés le Cercle Z sur le Cercle X, en sorte que son rayon OB tombe sur le rayon OA, vous connoîtrez évidemment par la précéd., que la Droite AB, passe par le Point d'attouchement O, si vous reposés le Cercle Z dans sa première situation; ce qu'il falloit démontrer.





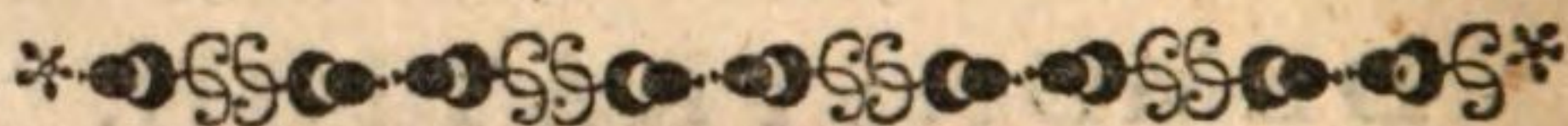
PROPOSITION XII.

T H E O R E M E

18 &
20 fig.

DEux circonferences de Cercle se touchent seulement en un Point.

C'est ce qui est très évident par le Coroll. de la Prop. 2, & par Prop. 10.



PROPOSITION XIII.

T H E O R E M E.

21 fig.

LEs Lignes Droites égales BC, LF appliquées au Cercle X sont également éloignées de son Centre A.

J'ajoute, que si ces Lignes sont également éloignées de ce Centre, elles sont égales.

DEMONSTRATION.

Parce que la grandeur du Segment CHB est terminée par la Ligne CB, il s'ensuit évidemment que, si on applique cette Ligne CB ou son égale LF en tout autre endroit du Cercle X, elle retranchera de

cc

Le Cercle un segment FGL égal en tout sens à ce premier CHB, d'où il s'ensuit que leur hauteur DH, EG sont égales, aussi bien que les distances AD, AE de leurs cordes ou Lignes CB, LF au Centre A par Défin. du Cercle & par l'Axiome 5. du Liv. 1; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que les distances AD, AE des Lignes CB, LF au Centre A sont égales par Supp., il s'ensuit par Défin. du Cercle & par l'Axiome 5. du Liv. 1. que les hauteurs DH, EG des Segmens CHB, FGL le sont aussi, & qu'enfin ces Segmens ayant même hauteur, ils sont évidemment égaux en tout sens, par les raisons précéd., & que par conséquent leurs cordes ou Lignes CB, LF sont égales; ce qui restoit à démontrer.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

JE dis que le Diametre AB est la plus grande de toutes les Lignes appliquées au Cercle Z. *Planche 2. 22 fig.*
Et que celle qui est plus proche du Centre

tre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

DEMONSTRATION.

Car si on considère ce Cercle comme divisé en deux parties égales par le Diamètre AB, on connoîtra évidemment que, de tous les Points des Arcs AOB, ANB, c'est-à-dire par égalité la circonférence AOBN, il n'y en a pas qui soient autant éloignés l'un de l'autre que les Points A, B, ni par conséquent de Lignes appliquées à ce Cercle si grande que son Diamètre; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que de tous les Points de l'Arc CND, il n'y en a pas qui soient si écartés que les deux C, D, on conclut évidemment que la Droite, CD, est plus grande que EF &c. ce qui restoit à démontrer.





PROPOSITION XV.

THEOREME.

SI la Ligne AD, est Perpendiculaire à l'extrémité du Rayon BA, elle sera Touchante au Cercle Z, & ne le touchera qu'au Point A, ^{23 fig.}

DEMONSTRATION.

Car on a fait voir par le Coroll. de la Prop. 2. qu'une Ligne Droite ne peut toucher la circonférence d'un Cercle en deux Points; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il suit que si du Centre d'un Cercle, on tire une Ligne au Point d'attouchement, cette Ligne ou Rayon sera Perpendiculaire à la Touchante.

PRO.



PROPOSITION XVI.

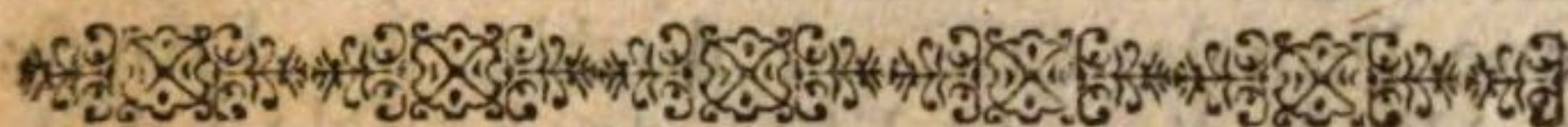
THEOREME.

Plan-
che 2
25 fig. SI la Ligne EA qui passe par le Point d'attouchement A, de la Ligne XC, est Perpendiculaire à cette Touchante, je dis que EA passe par le Centre D du Cercle Z.

Si on veut que B soit le Centre de ce Cercle, tirés du Point d'attouchement A à ce Centre prétendu B la Droite AB.

DEMONSTRATION.

Parce que l'Angle Droit EAC par Supposition ne peut être égal à l'Angle Aigu BAC, il s'ensuit par le Coroll. précéd. que le Point B n'est pas le Centre de ce Cercle, & qu'enfin ce ne peut être autre que le Point ou milieu D de la Droite EA; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XVII.

THEOREME.

L'Angle au Centre DBC, est double de ^{26 fig.}
 l'Angle à la circonference CAD,
 On suppose que ces Angles ont un même Arc DC pour bāse.

DEMONSTRATION.

Parce que le Triangle CBA est Isoscele par la Défin. du Cercle, il s'ensuit par le Coroll. 1. de la Proposit. 5. du Liv. 1., que les Angles à la bāse C, A sont égaux, & par la Prop. 16 du Liv. 1., que l'Angle au Centre CBD est égal à ces Angles, & que par conséquent cet Angle au Centre, est double de l'Angle à la circonference A; ce qu'il falloit démontrer.

Quoiquel'Angle à la circonference CAD ^{27 fig.}
 renferme l'Angle au Centre CBD; je dis
 que cet Angle est toujours double de celui à la circonference CAD.

DEMONSTRATION.

Car si de la Pointe de l'Angle CAD on
 tire par le Centre B, le Diametre ABE,
 G on

98 E L E M E N S D E

on connoîtra aisément par la précédente que l'Angle CBE est double de l'Angle CAE & l'Angle EBD de l'Angle EAD, & par égalité que le t^otal au Centre CBD est double du t^otal à la circonference CAD; ce qu'il falloit démontrer.

J'ajoute que l'Angle CBF est encore double de l'Angle à la circonference CEF, dont le côté CE coupe le côté FB.

28. fig.

DEMONSTRATION.

Car en tirant de la Pointe E, de cet Angle CEF, par le Centre B, le Diametre EBA, on connoît par le premier cas que l'Angle CBA est double de l'Angle CEA, & l'Angle ABF double de l'Angle AEF, & que retranchant ce premier CBA du t^otal ABF, & le second CEA du t^otal AEF, le restant d'une part ou l'Angle au Centre CBF, est double du restant de l'autre part ou Angle à la circonference CEF; ce qu'il falloit démontrer.

Si par exemple l'Angle au Centre ABF est de 100. degrés, AEF sera de 50; & si ABC est de 20, AEC sera de 10, par consequent si de ABF ou 100, on retranche ABC ou 20, le restant CBF ou 80, sera, évidemment, double de l'Angle CEF; parce que retranchant du t^otal AEF ou 50, l'Angle AEC ou 10, le restant CEF ou 40, est bien moitié de l'Angle CBF ou 80,

COROLLAIRES

I.

D'où il suit que si à la circonference d'un Plan-
Cercle comme X, il y a une infinité d'An- *che 3.*
gles, ils seront égaux entr'eux s'ils ont un *29 fig.*
même Arc EF pour bâte; car chacun est
moitié de celui au Centre EDF par les rai-
sons précédentes; ce qu'il falloit démon-
trer.

II.

Quoique les Angles C, D, soient dans *30 fig.*
le Segment ABCD plus petit qu'un demi
Cercle, je dis qu'ils sont aussi égaux.

Car les Triangles CSA, DSB, ont les
Angles, égaux A, B par le Coroll. pré-
céd., à cause qu'ils ont un même Arc,
CD pour bâte, comme aussi les opposés
CSA, DSB par 15, 1 & leur troisième C,
D par le Coroll. 5. de la Prop. 16. du Liv.
1; ce qu'il falloit démontrer.

III.

Il est encore évident que si les Cercles X, *31 & 33*
Z sont égaux, comme aussi les Angles à la *figures.*
circonference GFH, BAC, où ceux au
Centre GEH, BDC, les Arcs GH, BC
sont égaux; puisque si l'Arc BC, étoit plus
grand ou plus petit que l'Arc GH, les An-
gles du Cercle X seroient aussi plus grands

ou plus petits que ceux du Cercle Z ce qui feroit contre la Supp., donc &c.

I V.

*mêmes
figures.*

D'où il s'ensuit évidemment que, si ces Cercles sont égaux comme aussi les Arcs GH, BC, les Angles tant au Centre qu'à la circonference le sont de même.

V.

Et que si ces Cercles sont égaux comme aussi les Lignes ou cordes GH, BC les Arcs HG, CB le sont de même; car elles sont les mesures des deux Angles (au Centre E, D qui sont égaux entr'eux à cause des Triangles GEH BDC égaux en tout sens par 8, 1. &c.

V I.

Et qu'enfin si les Arcs BC, GH, des Cercles égaux X, Z, sont égaux, leurs cordes BC, GH le sont aussi, à cause des Triangles égaux en tous sens GEH, BDC par 4, 1.





PROPOSITION XVIII.

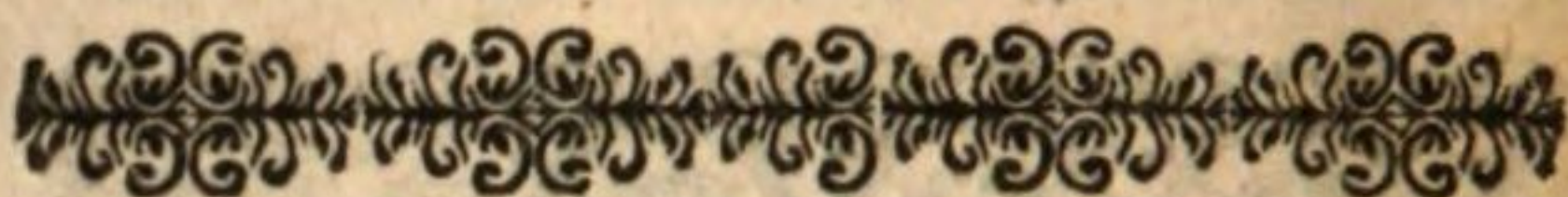
THEOREME.

Toute Figure Quadrilatere où de quatre *Plan-*
côtez, inscrite dans un Cercle à ses An- *che 2.*
gles opposez, pris ensemble, égaux à deux 16. *fig.*
Droits.

DEMONSTRATION.

Car l'Angle YKL a, par la précéd., pour
mesure la moitié de l'Arc YML, & l'An-
gle YML la moitié de l'Arc YKL, & par
égalité les deux Angles opposez K, M pris
ensemble, ont pour mesure la moitié de
toute la circonference, c'est-à-dire 180.
degrez, mesure de deux Angles Droits, &
par les mêmes raisons, les opposez Y, L,
sont aussi égaux à deux Droits; ce qu'il
falloit démontrer.





PROPOSITION XIX.

THEOREME.

*Plan-
che 3.
32 fig.*

DEux semblables Segmens de Cercle décrits sur une même Ligne Droite sont égaux entr'eux.

DEMONSTRATION.

Car outre que ces Segmens sont parties de Cercles égaux, ils ont par Supp. les Cordes de leurs Arcs égales entr'elles qui par le Coroll. 5. de la Prop. 17. soutiennent des Arcs, qui sont aussi égaux, de sorte que, si par la pensée on pose ces Segmens l'un sur l'autre, il est très évident qu'ils ne se surpasseront point, qui en ce cas sont égaux entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.



PRO-



PROPOSITION XX.

PROBLÈME.

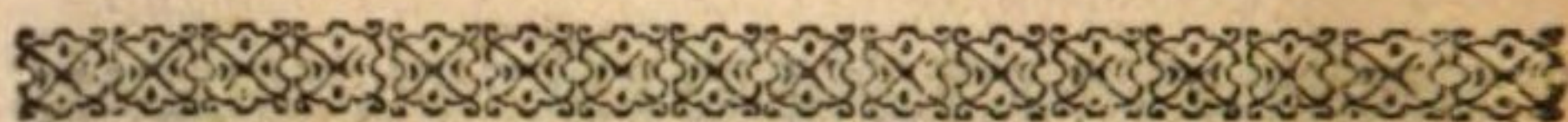
A Chever le Cercle dont l'Arc CED est 35 *fig.*
partie de sa circonference.

PRÉPARATION.

Tirés les Droites CE, DE, puis élevés de leur milieu les Perpendiculaires XF, ZF, & de leur Section F, décrits de l'ouverture FC où FD &c. le Cercle V qui sera celui qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car l'Arc CED est partie de sa circonference, & le Point F est son Centre par le Coroll. de la Prop. 7, à cause que les trois Points C, E, D en sont également éloignez ; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXI.

P R O B L E M E.

34 fig. **D**iviser l'Arc de Cercle AFD en deux également.

P R E P A R A T I O N.

Joignés ses extrémités A, D par la Droite DA, & des Points D, A décrivés d'une même ouverture de Compas les quatre Arcs, C, B, & tirés par leurs Sections la Droite CB, qui divisera l'Arc AFD comme on a proposé de le faire.

D E M O N S T R A T I O N.

Car outre que CE est Perpendiculaire à AD par 12. 1, AD est divisée en deux également en E par 10, 1, & le Point F est également éloigné des Points A, D par la Défin. 11, du Liv. 1, & les Cordes AF, FD sont égales par la Défin. 4. du même Liv., comme aussi les Arcs FA, FD par le Coroll. 5, de la Prop. 17; ce qui suffit.



PROPOSITION XXII.

THEOREME

L'Angle DAC qui est dans le demi Cercle DABC est Droit. *Plan-
che 2.
17 fig.*

Et l'Angle ACB qui est dans le Segment ADOCB plus grand qu'un demi Cercle, est Aigû.

Et l'Angle ABC, qui est dans le Segment AEBC plus petit qu'un demi Cercle est Obtus.

DEMONSTRATION.

Le premier, DAC, a, par 18, pour mesure la moitié de la demie circonference DOC qui est de 180. degrez &c.

DEMONSTRATION.

Et le second ACB, a pour mesure la moitié de l'Arc AEB qui est moindre que 180 degres &c.

DEMONSTRATION

Et le troisiéme ABC, à pour mesure la moitié de l'Arc ADOC qui est de plus de 180 degrés &c.



PROPOSITION XXIII.

P R O B L E M E

DU Point donné C tirer une Ligne qui touche la circonference du Cercle A.

PREPARATION.

24 *fig.* Du Centre de ce Cercle tirés à ce Point C la Droite AC & de son milieu D décrits de l'ouverture DA ou DC le demi Cercle ABC, puis du Point C tirés à la Section B la Droite CB, qui est Touchante au Cercle A.

DEMONSTRATION.

Car l'Angle ABC étant Droit par la précéd., on conclut évidemment par 15. que CB est une Touchante; ce qu'il falloit faire & démontrer.

PRO-



PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

SI la Ligne Droite DC, coupe la circon-
ference du Cercle M, au Point d'at-
touchement C, je dis que l'Angle DCB,
compris entre cette Coupante CD & la
Touchante CB, est égal à ceux des Segmens
Alternes.

*Plan-
che 3
36 fig.*

Il faut démontrer que cet Angle DCB
est égal à chaque des Angles E, F, G du
Segment Alterne CGFED.

DEMONSTRATION.

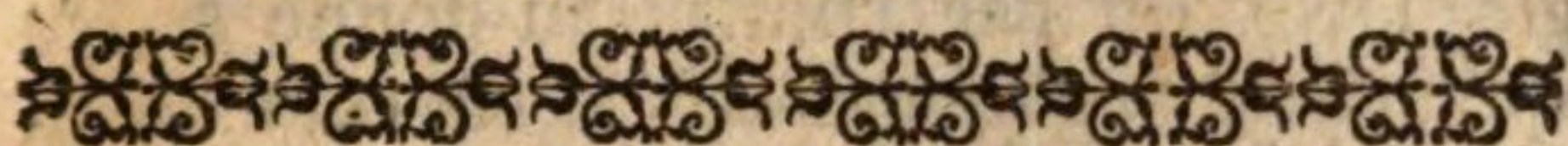
Parce qu'en tirant de ce Point d'attou-
chement C, le Diametre CE, qui par le
Coroll. de la Prop. 15. est Perpendiculaire à
AB, & la Droite DE, on a le Triangle
CED, dont les trois Angles pris ensemble
sont, par la Prop. 16 du Liv. 1., égaux à
deux Droits, aussi bien que les Angles ACE,
ECB, on connoît aisément qu'ôtant les
Droits ACE, CDE, le restant d'une part
ou Angle Droit ECB est égal aux deux An-
gles ECD, CED & que retranchant le
commun ECD, le restant CED est égal au
restant DCB, & qu'enfin, les Angles G,
F,

F, E étant égaux entr'eux par le Coroll. 1. de la Prop. 17, par ce qu'ils ont un même Arc CD pour bāse, on a raison de dire que l'Angle DCB compris entre la Touchante CB & la Coupante CD, est égal à ceux des Segmens Alternes, c'est-à-dire, à l'Angle E ou à l'Angle F, ou à l'Angle G; ce qu'il falloit démontrer.

37 fig. J'ajoute que l'Angle Obtus ACB compris entre la Coupante CB & la Touchante, AC, est aussi égal à l'Angle CDB, du Segment Alterne BDC.

DEMONSTRATION

Parce qu'en tirant du Point d'attouchement C, le Diametre CF, qui par le Coroll. de la Prop. 15, est Perpendiculaire à AC, & la Droite FB, on a le Quadrilatere FCDB, dont les Angles opposés, F, D sont égaux à deux Droits par 18, comme aussi les Angles ACB, BCE, par le Coroll. 1. de la Prop. 13. du Liv. 1, il s'ensuit que, puisqu'on vient de démontrer que l'Angle BCE est égal à l'Angle CFB, le reste de deux Droits, c'est-à-dire l'Angle Obtus ACB compris entre la Coupante BC & la Touchante CA, est aussi égal au reste de deux Droits, c'est-à-dire à l'Angle CDB du Segment Alterne BDC; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

DEcrire sur la Ligne donnée DB un ³⁸ *fig.*
Segment de Cercle capable de l'Angle
donné A.

PREPARATION.

Faites à l'extrémité B de cette Droite DB l'Angle EBD égal à ce donné A, & élevés de cette extrémité B, la Perpendiculaire BC, & du milieu O de cette même Ligne DB, la Perpendiculaire OM, & de la Section M décrits de l'ouverture MB ou MD, le Cercle X, tirés DC; je dis que le Segment DCVB est capable de cet Angle donné A.

DEMONSTRATION

Parce que la Ligne OM est Perpendiculaire sur le milieu de la Droite DB, il s'ensuit par la Déf. 11. du Liv. 1. que le Point M est également éloigné des Points D, B, & que par conséquent DM est égale à MB, & qu'ainsi la circonférence du Cercle X passe par les extrémités de la Ligne DB, & par 24. que l'Angle DCB est égal à l'Angle
gle

gle DBE où par conſtr. au donné A, & qu'enfin le Segment DCVB eſt celui qu'on avoit propoſé de décrire ſur la Droite donnée DB; ce qu'il falloir faire & démonſtrer.

40 fig. Si cet Angle A avoit été Droit il n'étoit queſtion que de décrire, du milieu O, de cette Ligne DB, de l'ouverture OD ou OB, le demi Cercle DWB, & tirer les Lignes WD, WB; car l'Angle DWB étant Droit par 22, il auroit été égal au donné A &c.

39 fig. Mais ſi cet Angle donné A avoit été Obtus il auroit fallu décrire comme auparavant le Segment DFB, lequel eſt évidemment capable de cet Angle donné A; car l'Angle EBD étant égal à l'Angle BFD, par le ſecond cas de la Prop. 24, il ſ'enſuit par égalité que l'Angle A eſt auſſi égal à cet Angle BFD &c.



PROPOSITION XXVI.

P R O B L E M E.

38 fig. **R**etrancher du Cercle X un Segment capable de l'Angle donné A.

PREPARATION.

Après avoir tiré, par 16, la Touchante
BE,

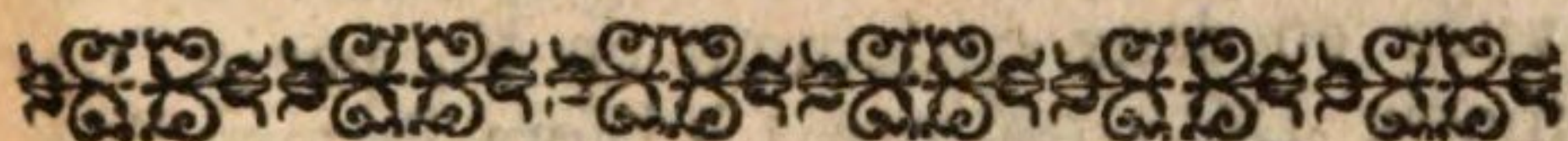
GEOMETRIE. LIV. III. III

BE, faites au Point d'attouchement B, l'Angle DBE égal au donné A.

Je dis que le Segment DCVB est capable de cet Angle donné A.

DEMONSTRATION.

Car étant capable de l'Angle DBE par 24, il est très évident qu'il l'est aussi de l'Angle donné A parce que cet Angle A est par constr. égal à l'Angle DBE; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

SI deux Lignes Droites se coupent dans 41 fig.
un Cercle, je dis que le Rectangle compris sous les parties de l'une, est égal au Rectangle compris sous les parties de l'autre.

DEMONSTRATION.

du premier Cas.

Il est très évident que, si les Lignes AB, CD se coupent au Centre du Cercle Z, le Rectangle compris sous les parties AZ, ZB,

ZB, de la Ligne AZB, est égal au Rectangle compris sous les parties ZD, ZC de la Ligne DZC, parce que ces Rectangles sont quarrés des Rayons, qui par Défin. du Cercle sont égaux entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

du second Cas.

42 fig. Si l'une de ces deux Lignes comme AB ne passe pas par le Centre E, mais est divisée en deux également en F, par le Diametre DC, qui par 3 lui sera Perpendiculaire, on connoîtra aisément par 5-2 que le Rectangle sous FD, FC, avec le Quarré de FE est égal au Quarré de ED ou du Rayon EA, & par 34, 1 que ce Quarré de EA est égal à la somme des Quarrés de FE, de FA, & par égalité que ces Quarrés de FE de FA sont égaux au Quarré de FE, plus au Rectangle sous FD, FC & qu'enfin ôtant de part & d'autre le Quarré commun de FE, le restant de FA compris sous FA, FB est égal au Rectangle compris sous FD, FC; ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

*même
fig.*

On connoît encore la vérité de ce Theoreme par les nombres; car si par exemple le Diametre CD est 10, les Rayons ED, EA seront chacun 5, & si EF est 4, FC
fera

fera 1. & FA, FB chacune 3, parce qu'en ôtant le Quarré de EF 16, du Quarré de AE 25, le restant de AF étant 9, son côté où racine AF est 3, puisque 3. fois 3. font 9, par consequent le Rectangle sous FD, FC étant 9, il s'ensuit qu'il est égal au Quarré de AF compris sous FA, FB, à cause qu'il est aussi 9,

DEMONSTRATION.

Du troisième Cas.

Si cette Ligne AB étoit divisée en deux *Plans* inégalement en E, lui ayant tiré du Centre *che 4.* F la Droite FG, sur son milieu G, qui ^{43 fig.} par 3 lui sera Perpendiculaire, & la Droite ou Rayon FA, on connoîtroit toujours par 5, 2, que le Rectangle sous ED, EC avec le Quarré de la partie d'entre-deux EF, est égal au Quarré du Rayon FC ou du Rayon FA, & par 34, 1, que le Quarré de cette partie d'entre-deux EF, est égal à la somme des Quarrés de EG de GF, & par égalité que le Rectangle sous ED, EC avec ces derniers Quarrés est égal au Quarré du Rayon FC, & par 5, 2 que, AB étant divisée également en G, & inégalement en E, le Rectangle sous AE, EB avec le Quarré de la partie d'entre-deux EG est égal au Quarré de AG moitié de AB, & qu'enfin ajoutant de part & d'autre le Quarré de FG, le Rectangle sous AE EB avec les Quarrés de EG de FG est égal à la somme des Quarrés de AG de GF ou par 34, 1, au seul du Rayon AF.,

H

On

On a prouvé que le Rectangle sous ED EC avec ces mêmes Quarrés de EG de FG étoit auffi égal au Quarré de ce Rayon AF, de sorte donc qu'ôtant à ces Rectangles ces Quarrés de EG, de GF, le reste ou Rectangle sous ED, EC fera égal au reste ou Rectangle sous AE, EB; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

Du quatrième Cas.

44. fig. Si aucune des deux Lignes AB, CD qui s'entre-coupent en O ne passe pas par le Centre V, on connoîtra aisément par le Cas précédent, en tirant par la Section O le Diametre FOE, que le Rectangle compris sous AO, OB est égal au Rectangle sous les parties OE, OF du Diametre EOF & par les mêmes raisons que ce dernier Rectangle, est égal au Rectangle sous CO, OD & par égalité que le Rectangle sous CO, OD est égal au premier sous AO, OB; ce qui restoit à démontrer.

SCHOLIE.

On peut encore démontrer cette Proposition d'une autre manière, sçavoir de celle qui suit, qui est beaucoup plus courte & plus facile que la précédente, puisque par celle-ci, on démontre tout à la fois les quatre Cas précédens, mais comme elle dépend
en

en partie de quelques raisons du Liv. 6. on peut la laisser jusqu'à ce qu'on ait vu ce Livre.

Je dis donc que, si deux Lignes Droites DOB, EOA s'entre-coupent dans le Cercle Z, le Rectangle compris sous les parties OD, OB de la première DOB est égal au Rectangle compris sous les parties OE, OA de la seconde EOA. 48 fig.

DEMONSTRATION.

OD. OE :: OA, OB. Car en tirant les Droites AB, ED, on a les Triangles EOD, BOA qui aiant les Angles égaux DOE, AOB par 15, 1, & les Angles OED, OBA, qui ont un même Arc AD pour bafe, & leur troisiéme D, A à cause de l'Arc commun EB par le Coroll. 1. de la Prop. 17, sont Equiangles, & ont par 4, 6. les côtés proportionnels, en sorte que, l'Angle DOE, étant égal à l'Angle AOB, la raison du côté OD au côté OE, sera égale à celle du côté OA au côté OB, & par 12, 6 le Rectangle compris sous les extremes OD, OB, sera égal au Rectangle compris sous les moïennes OE, OA; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XXVIII.

T H E O R E M E.

45 fig.

SI d'un Point quelconque A pris hors d'un Cercle Z, on tire deux Lignes, l'une Touchante comme AD & l'autre Coupante comme AC, qui passe par le Centre B, je dis que le Rectangle compris sous toute cette Coupante AC & sa partie hors du Cercle AE, est égal au Quarré de la Touchante AD.

DEMONSTRATION.

Car si on abaisse du Centre B sur cette Touchante DA, la Perpendiculaire BD, qui par 15, ira dans le Point d'attouchement D, on connoitra aisément par 6, 2. que, la Ligne ou Diametre EC étant divisé également en B & que lui ajoutant EA, le Rectangle sous la Toute AC & l'ajoutée AE avec le Quarré de BE ou de BD, est égal au Quarré de BA, ou par 34, 1. à ceux de BD, de DA & qu'enfin, ôtant le commun de BD, le Rectangle compris sous la Coupante AC & sa partie hors du Cercle EA, est égal au Quarré de la Touchante DA; ce qu'il falloit démontrer.

La

La même chose se verifië par les nombres.

Car si par exemple AC est 8 & CB 3, même BE sera aussi 3 comme aussi BD, & EA fig. sera 2. & DA 4, parce qu'en ôtant le Quarré de BD 9, de celui de BA 25, le restant 16 est celui de DA, dont le côté ou racine est 4, parce que 4 fois 4 font 16, & comme le Rectangle sous AC 8, AE 2, est 16, il s'ensuit qu'il est égal au Quarré, de la Touchante AD, puisqu'il est aussi 16.

Quoique la Coupante AB ne passe pas par le Centre F, le Rectangle compris sous elle & sa partie hors du Cercle AD ne laisse pas que d'être toujours égal, au Quarré de la Touchante AG. 46 fig.

DEMONSTRATION.

Car si de ce Point A, on tire par le Centre F, la Droite AH, & de ce Centre F, la Droite FG Perpendiculairement à GA, & la Droite FC Perpendiculairement à BD, & le Rayon FD, on connoitra aisément par 6, 2 que la Ligne DB étant divisée également en C par 3. & que lui ajoutant DA, le Rectangle compris sous AB, AD avec le Quarré de CD, est égal au Quarré de CA, & qu'ajoutant de part & d'autre le Quarré de FC, le Rectangle sous AB, AD avec les Quarrés de CD de CF ou par 34, 1. avec le seul du Rayon FD ou du Rayon FG, est égal à ceux de CA de CF ou par 34, 1 au seul de FA ou par la même aux deux de FG de GA & qu'enfin

H 3

ôtant

ôtant le commun de FG, le Rectangle compris sous la Coupante AB & sa partie hors du Cercle DA est égal au Quarré de la Touchante AG; ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

On peut démontrer plus facilement ce Theoreme, savoir de la manière suivante, laquelle est beaucoup plus courte & plus claire que la précédente, puisque par celle-ci; on démontre tout-à-la fois les deux Cas précédens.

Mais comme elle depend de quelques raisons du Livre 6, on peut la laisser jusqu'à ce que l'on ait vû ce Livre.

51 fig.

Je dis donc que si d'un Point quelconque C, pris hors d'un Cercle Z, on tire deux Lignes, l'une Touchante comme CA & l'autre Coupante comme CB, le Rectangle compris sous la Coupante CB & sa partie hors du Cercle CD, est égal au Quarré de la Touchante CA.

D E M O N S T R A T I O N.

CB. CA :: CA. CD. Car si du Point d'attouchement A on tire aux Sections B, D les Droites AD, AB, on connoitra aisément par 24. que l'Angle DAE est égal à l'Angle DBA, & par le Coroll. 5. de la Prop. 16. du Liv. 1, que l'Angle BAC, est égal à l'Angle CDA, à cause du commun C aux deux Triangles
BAC

BAC, ADC qui, maintenant, étant équiangles, on conclut évidemment par 4, 6 que la raison du côté CB à son Homologue CA, est égale à celle de ce même côté CA à son Homologue CD, & par 12, 6 que le Rectangle, compris sous les extremes ou Coupante CB & sa partie hors du Cercle CD, est égal au Quarré de la Moienne ou Touchante CA; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES

I.

Il suit de cette Proposition, que si du même Point A, on tire plusieurs Coupantes, les Rectangles compris sous elles & leur partie hors du Cercle seront égaux entr'eux; car chaque de ces Rectangles est égal au Quarré de la Touchante AD; ce qu'il falloit démontrer. 47 fig.

II.

Et que si du même Point A on tire deux Touchantes AB, AD, elles seront égales, parce que le Quarré de chacune est égal au Rectangle compris sous la Coupante AF & sa partie hors du Cercle AE; ce qu'il falloit démontrer. même fig.

III.

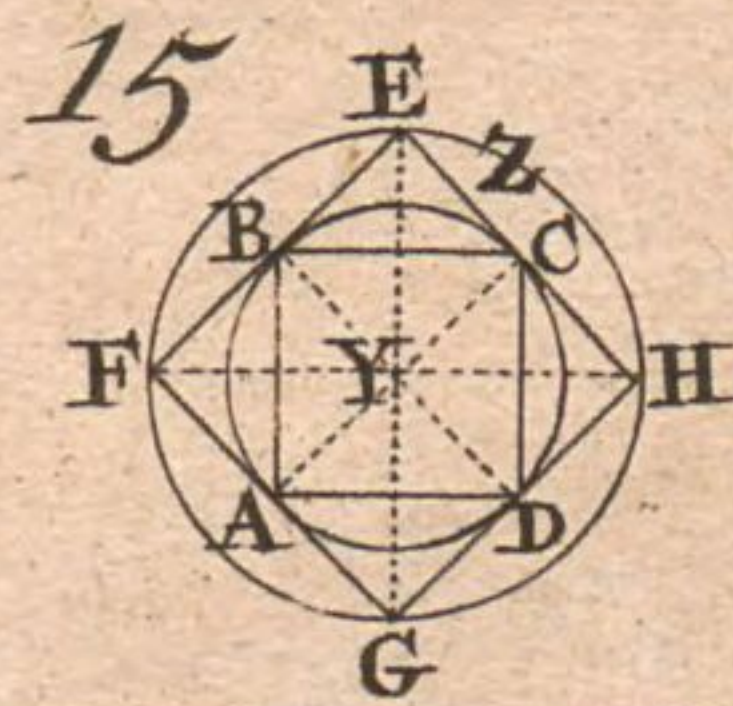
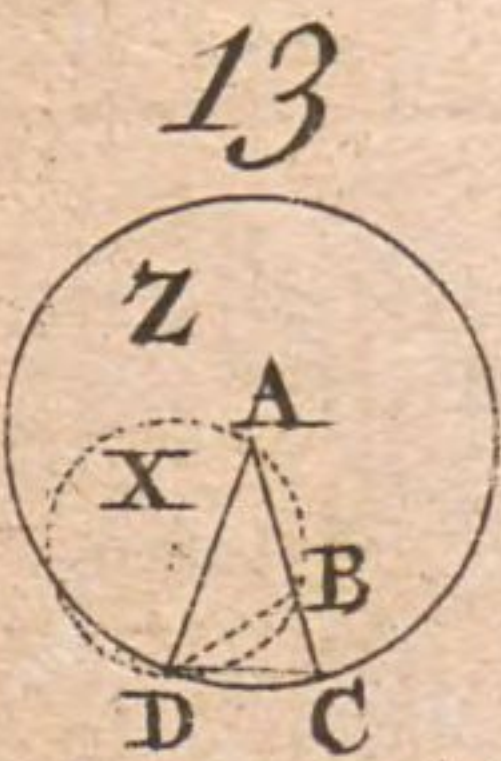
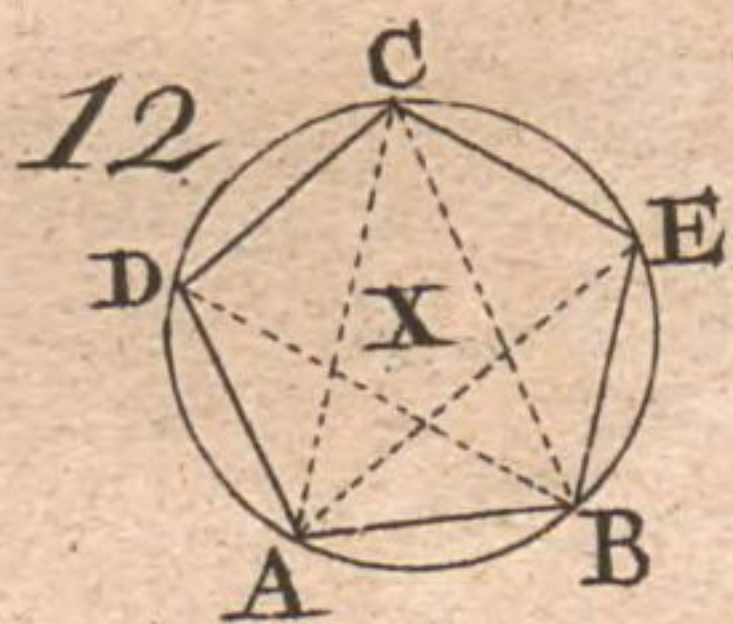
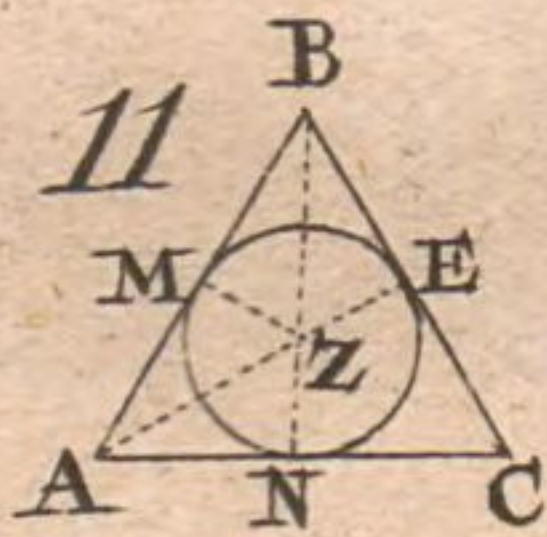
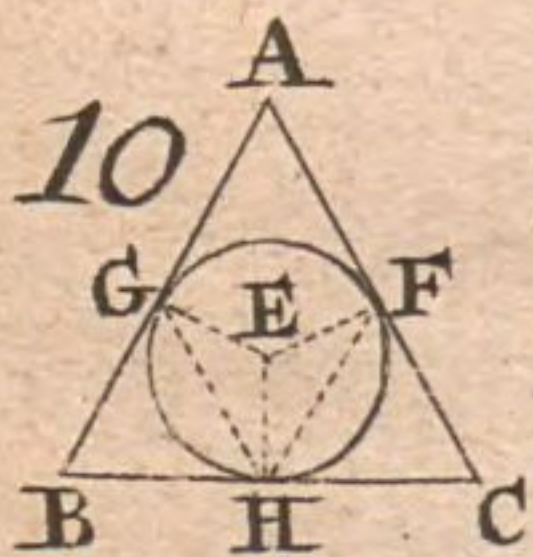
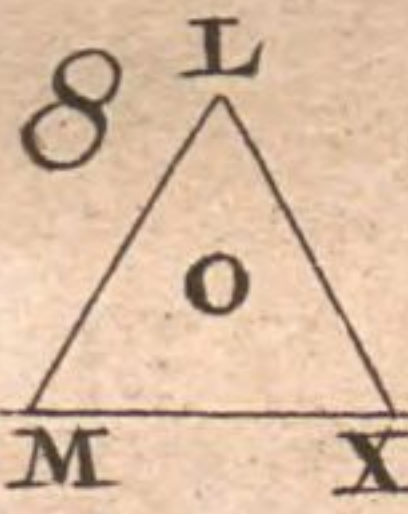
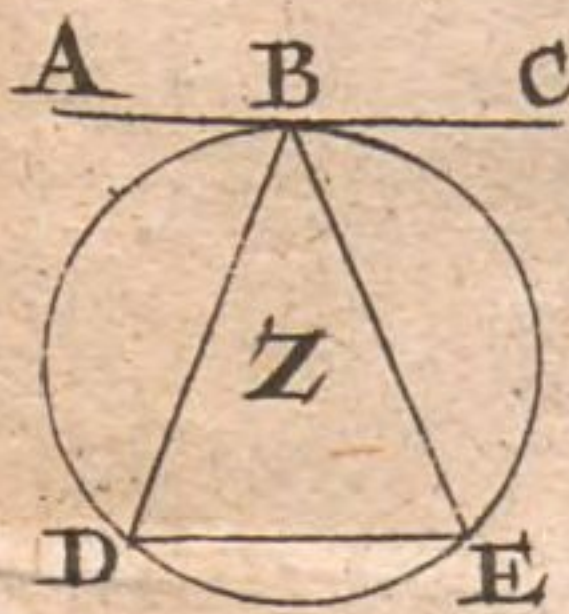
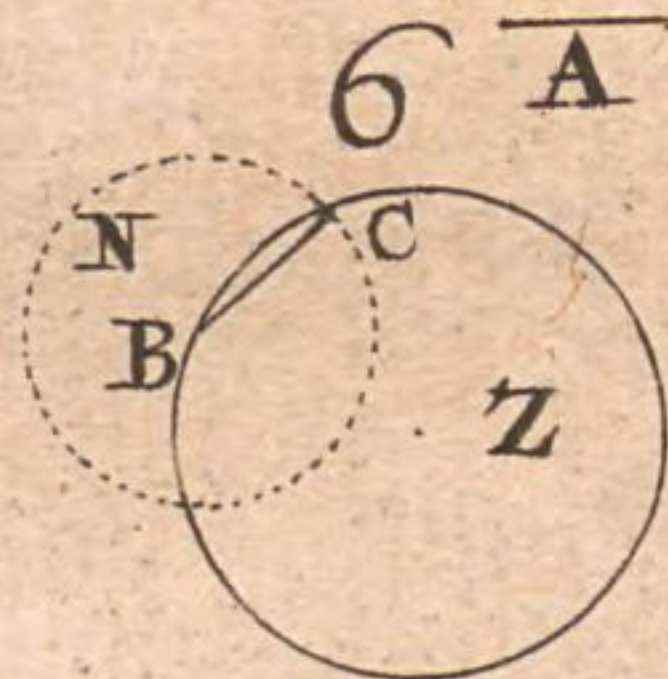
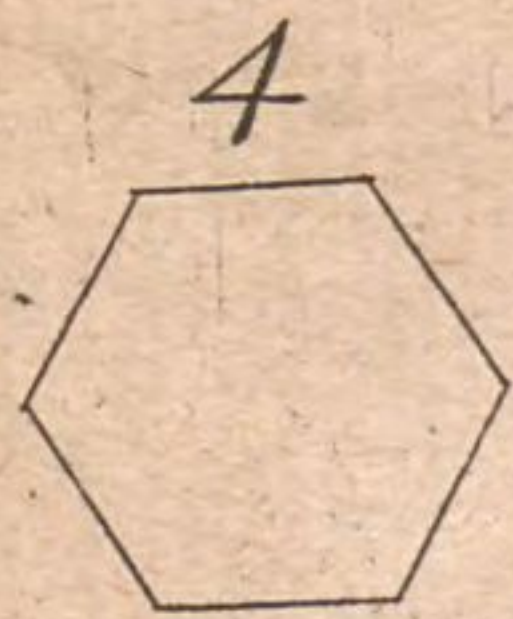
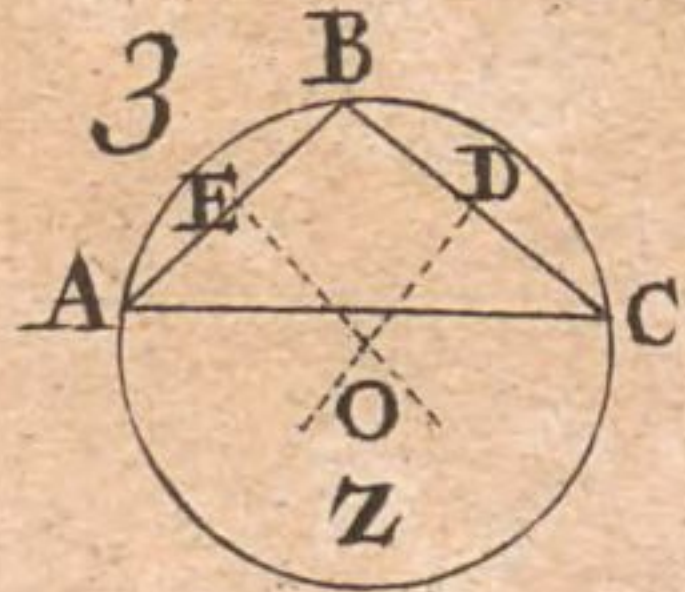
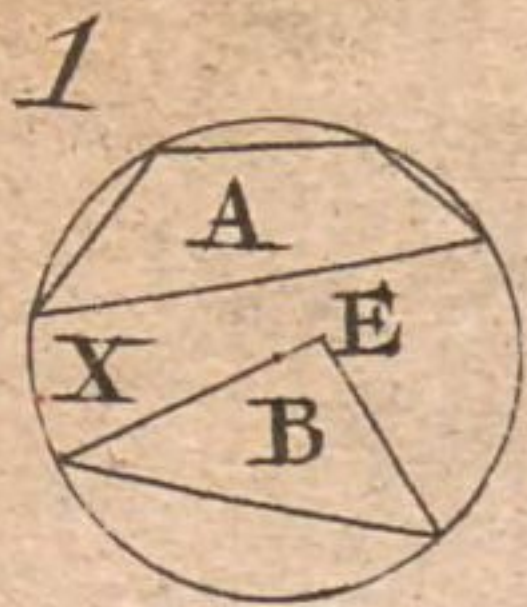
Il s'ensuit aussi que si le Rectangle, compris

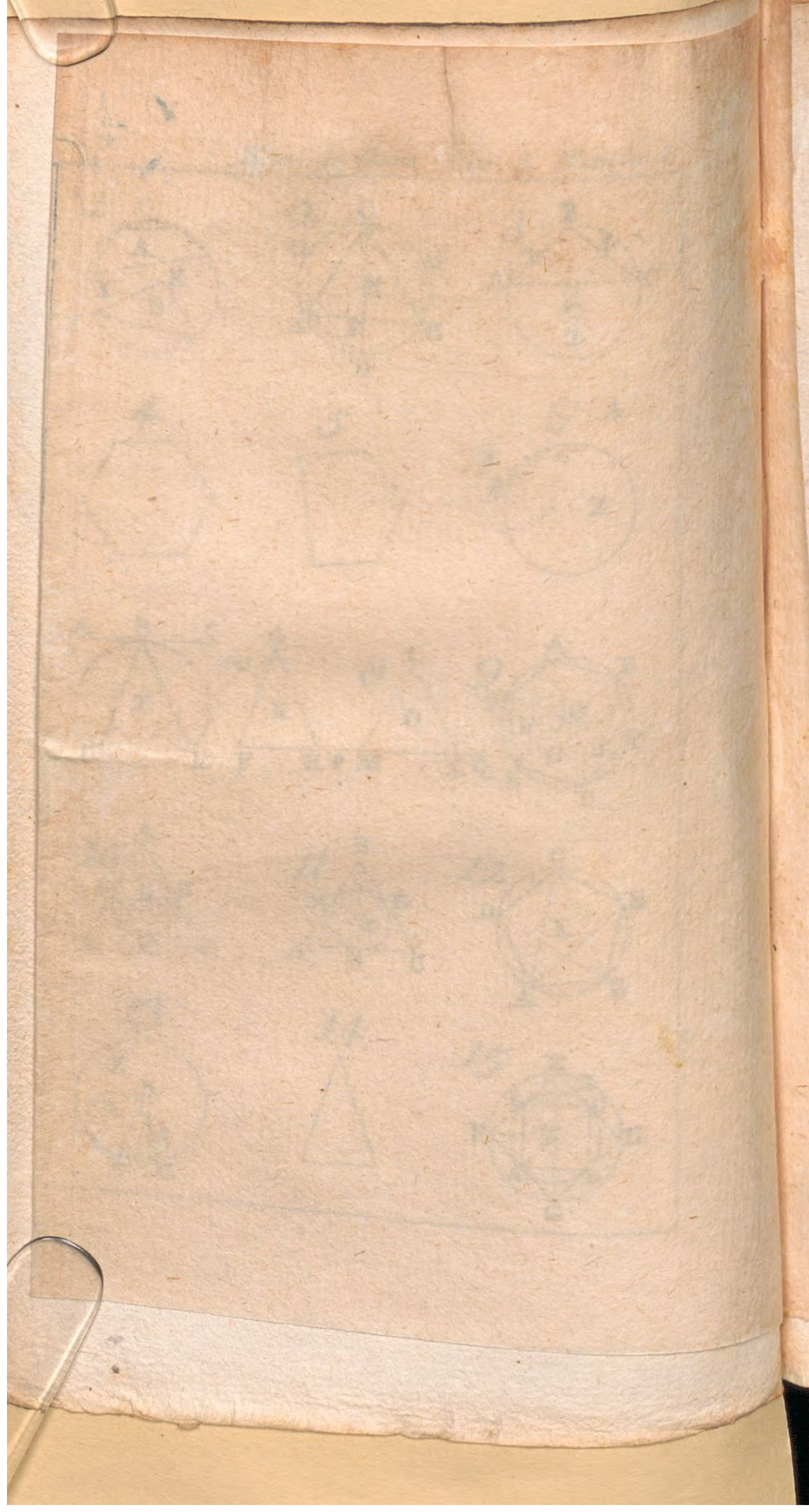
même
fig.

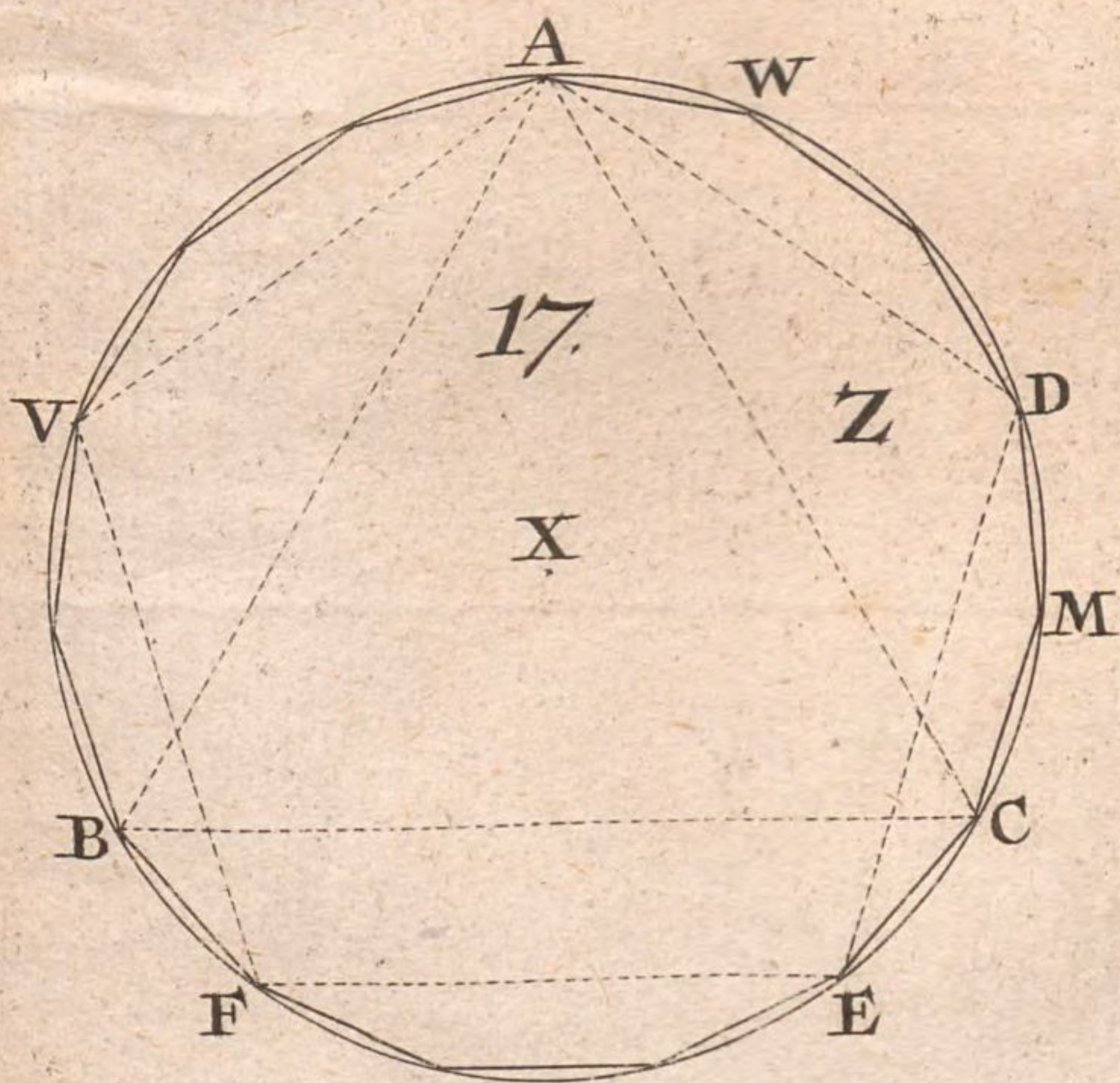
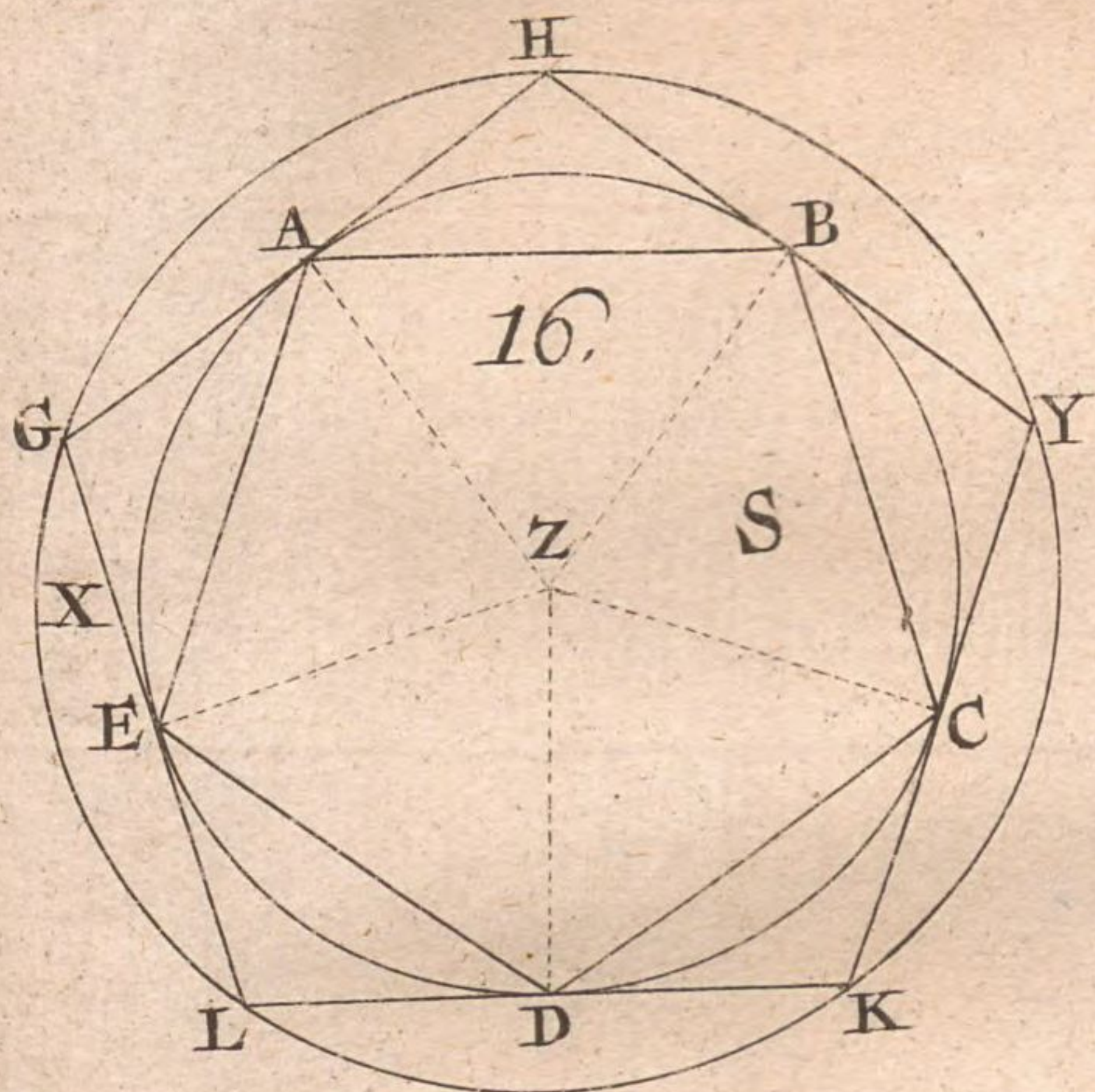
pris sous chaque Coupante & sa partie hors du Cercle, est égal au Quarré d'une Ligne qui tombe sur la circonference de ce Cercle, cette Ligne lui est Touchante, car il s'ensuit évidemment par les raisons précédentes, qu'elle est terminée par le Point pris hors du Cercle & celui d'attouchement, & que par consequent elle est une Touchante; ce qu'il falloit démontrer.

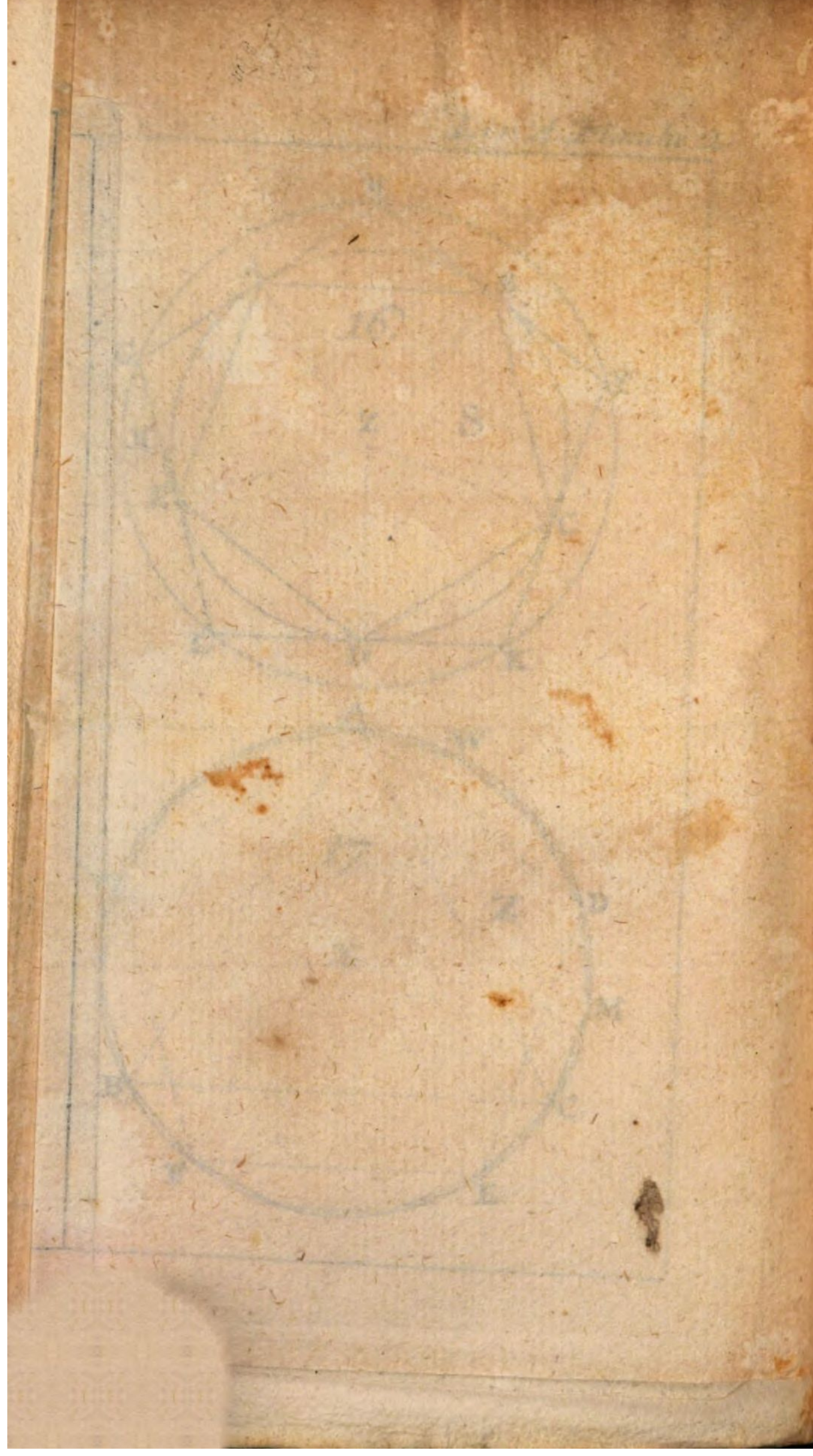
Fin du Livre troisiéme,













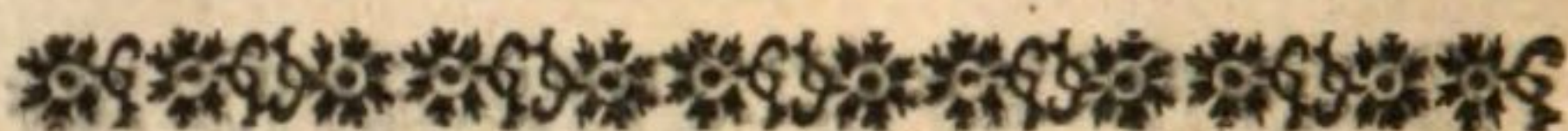
ELEMENTS DE GEOMETRIE, OU

DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE QUATRIEME



UCLIDE nous ayant fait voir dans le Livre précédent les principales Propriétés du Cercle, il nous enseigne dans celui-ci la manière d'y inscrire & circoncrire des Polygones Reguliers; ce qui est d'une grande utilité, sur tout aux Ingenieurs, puisque pour représenter le dessein de leurs Fortifications, ils ont besoin d'inscrire des Polygones Reguliers dans le Cercle.



D E F I N I T I O N S

I.

Plan-
che I.
I fig.

LA Figure A est dite inscrite dans le Cercle X, où ce Cercle est dit circonscrit à cette Figure, si les Pointes des Angles de cette Figure sont à la circonference de ce Cercle, ou si la circonference de ce Cercle passe par les Pointes des Angles de cette Figure.

I I.

même
fig.

Il suit de cette Définition que la Figure B est non-inscrite dans le Cercle X, parce que la Pointe de son Angle E, n'est pas à la circonference de ce Cercle.

I I I.

II fig.

La Figure Rectiligne A B C, dont tous les côtés touchent le circuit du Cercle Z, est dite circonscrite à ce Cercle; & ce Cercle dont la circonference touche tous les côtés de cette Figure, est dit inscrit dans cette Figure.

I V.

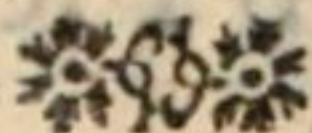
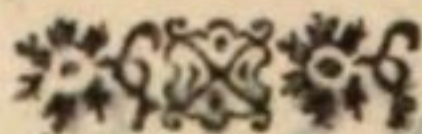
4 & 5
figures.

Toute Figure de plus de quatre côtés s'appelle

s'appelle Poligone, on les distingue en ce qu'on appelle Pentagone celui qui est terminé de cinq côtés, Hexagone celui qui est terminé de six cotés, Heptagone celui qui l'est de sept, Octogone celui qui l'est de huit, Enneagone celui qui l'est de neuf, Decagone celui qui l'est de dix, Endecagone celui qui l'est d'onze & Dodecagone celui qui est terminé de douze côtés &c.

V.

On le nomme Poligone Regulier lorsqu'on le voit 4 fig.
que tous, ses côtés sont égaux entr'eux
comme aussi tous ses Angles, & Poligone 5 fig.
Irregulier lorsque cette égalité de côtés, &
d'Angles, ne se rencontre pas.





PROPOSITION I.

P R O B L E M E.

6 fig. **A** Ppliquer au Cercle Z une Ligne égale à la donnée A qui est moins longue que le Diametre de ce Cercle.

PREPARATION.

De l'ouverture de cette Ligne donnée A decrivés du Point B, pris à volonté dans la circonference du Cercle proposé, le Cercle N, & de son Centre B tirés à la Section C la Droite B C, qui sera celle qu'on avoit proposé d'appliquer au Cercle Z.

DEMONSTRATION.

Puisque par 2, 1. elle est égale à la donnée A; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION II.

PROBLEME

Inscrire dans le Cercle Z un Triangle équiangle au donné X. *Plan-
che I
7 fig.*

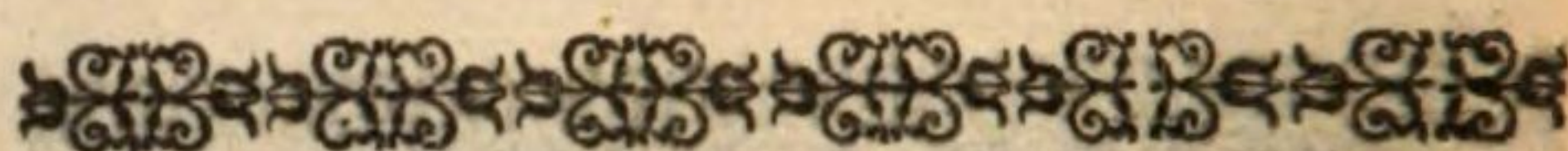
PREPARATION.

Tirés par un Point quelconque B, de la Circonference de ce Cercle, une Touchante AC, & faites au Point d'attouchement B, l'Angle ABD égal à l'Angle H, & l'Angle CBE égal à l'Angle F; enfin joignés la Droite DE qui achevera le Triangle DBE, que je dis être Equiangle au donné X.

DEMONSTRATION.

Car l'Angle ABD étant égal à l'Angle H, & l'Angle CBE à l'Angle F, par constr., on connoît par 24, 3 que l'Angle E est, par égalité, égal à l'Angle H, & l'Angle D, à l'Angle F, & par le Coroll. 5. de la Prop. 16. du Liv. 1. que l'Angle DBE est égal à l'Angle G & que par consequent le Triangle DBE est équiangle au donné X; ce qu'il falloit démontrer.

PRO-



PROPOSITION III.

P R O B L E M E.

8 & 10 *fig.* **C**irconscrire au Cercle donné E, un Triangle Equiangle au donné O.

P R E P A R A T I O N.

Après avoir prolongé de part & d'autre sa base MX, faites au Centre du Cercle donné, l'Angle GEH égal à l'extérieure LMP, & l'Angle HEF, à l'extérieure LXQ, & tirés par les Points G, H, F les Touchantes AC, AB, BC qui termineront le Triangle ABC, que je dis être équiangulaire au donné O.

D E M O N S T R A T I O N.

Car si on tire les Droites GH, HF, on connoîtra aisément par 16. 1, que les six Angles des Triangles BHG, HGE valent quatre Droits, & par le Coroll. de la Prop. 15. du Liv. 3, que les Angles BHE, BGE en valent deux, & que par conséquent les Angles GEH, GBH en valent autant, & que, comme les Angles LMP, LMX en valent aussi deux, & que l'Angle LMP, est égal à

à l'Angle GEH par constr., l'Angle GBH est égal à l'Angle LMX, & par les mêmes raisons que l'Angle C, est égal à l'Angle LXM, & par le Coroll. 5 de la Prop. 16. du Liv. 1. que le troisième A est égal au troisième L, & qu'ainsi le Triangle ABC est Equiangle au donné O, & circonscrit au Cercle donné Z comme il est évident; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION IV.

PROBLEME.

Inscrire un Cercle dans le Triangle donné ABC. II fig.

PREPARATION.

Divisés les Angles B, A en deux également, & de la Section Z, abaissés aux côtés de ce Triangle les Perpendiculaires ZE, ZM, ZN, que je dis être égales entr'elles, de sorte que si on décrit de l'ouverture ZE, le Cercle Z, sa circonference passera par les extrémités ou Points N, M, E.

DE-

DEMONSTRATION

Parce que les Angles MBZ, ZBE sont égaux par constr. & que les deux ZMB, ZEB sont Droits, ils'ensuit par le Coroll. 5. de la Prop. 16. du Liv. 1, que les Triangles Rectangles ZMB, ZEB sont équiangles, & par 20, 1. qu'ils sont égaux en tout sens à cause du côté commun ZB, & que par consequent la Perpendiculaire ZE, est égalé à la Perpendiculaire ZM, & par les mêmes raisons que les Triangles Rectangles NZA, ZAM sont égaux en tout sens, & par l'Axiome 3. du Liv. 1. que les Perpendiculaires ZN, ZM, ZE sont égales entr'elles, & qu'ainsi la circonference du Cercle Z, décrit de l'ouverture ZE, touche les cotés du Triangle ABC aux Points N, M, E, & par Défin. 3, que ce Cercle lui est inscrit; ce qu'il falloit faire & démontrer.





PROPOSITION V.

PROBLEME.

Circonscrire un Cercle au Triangle ABC , 3 fig.
ou plutôt faire passer la Circonference
d'un Cercle par les trois Points A, B, C .

PREPARATION.

Joignés ces Points par les Droites AC, BC, BA & divisés par 10, 1. deux cotés ou Lignes comme AB, BC en deux également, puis de la Section O , décrivés de l'ouverture OA ou OC ou OB le Cercle Z qui sera circonscrit au Triangle donné, de sorte que sa circonference passera par les trois Points A, B, C .

DEMONSTRATION.

Parce que la distance du Point A au Point O est, par la Défin. 11. du Liv. 1, égale à celle du Point B à ce même Point O , & que celle du Point B à ce Point O , est égale à celle du Point C à ce Point O , il s'ensuit par l'Axiome 3. du Liv. 1, que les distances des trois, Points A, B, C à ce Point O ,
sont

sont égales entr'elles, & que par conséquent le Cercle Z, décrit de l'ouverture OA ou OB &c, est circonscrit au Triangle ABC, ou que la Circonference de ce Cercle, passe par les trois Points, A, B, C; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION VI. & VII.

P R O B L E M E S.

15. fig. **I**nscrire & circonscrire un Quarré au Cercle Y.

P R E P A R A T I O N.

Après avoir tiré les Diametres BD, AC de manière qu'ils se coupent à Angles Droits, joignés les Droites AB, BC, CD, DA, qui termineront le Quarré inscrit ABCD., & décrivés des Pointes de ce Quarré, de l'ouverture du Rayon BY, les huit Arcs E, F, G, H, & tirés des Pointes de ce Quarré, aux Sections de ces Arcs, les Droites FBE, FAG, GDH, HCE qui composeront les Droites FE, FG, GH, HE: qui sont égales entr'elles: & qui termineront le Quarré circonscrit EFGH.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre Points A, B, C, D sont également éloignés l'un de l'autre par la Défin. 11. du Liv. 1, on conclut évidemment par la Défin. 4, du même Liv., que les Droites AB, BC, CD, DA sont égales entr'elles & par la Défin. 18, du même Liv., que la Figure ABCD est un Quarré, à cause des Angles Droits ABC, BCD, CDA, DAB, par 22, 3; ce qu'il falloit faire & démontrer.

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident que les huit Triangles Isofceles qui composent la Figure EFGH, sont égaux en tout sens, par 8, 1, car outre qu'ils ont deux côtés égaux par constr., ils ont le commun AB, BC, CD, DA qui sont égaux entr'eux; en sorte donc que, les quatre Triangles qui composent le Quarré inscrit, étant Rectangles en Y, les quatre autres le seront en F, E, H, G, & les Lignes qui terminent la Figure EFGH seront évidemment des Lignes Droites FE, FG, GH, HE, qui étant égales entr'elles, terminent comme on a dit, le Quarré EFGH qu'on avoit proposé de circoncrire au Cercle donné Y; ce qui restoit à faire & à démontrer.



PROPOSITION VIII. & IX.

P R O B L E M E S.

*même
fig.*

INscrire & circonscrire un Cercle au Quarré EFGH,

P R E P A R A T I O N.

Divisés deux côtez comme FG, FE en deux également par les Perpendiculaires AY, BY qui concourront au Point Y, duquel vous décrirés de l'ouverture YB ou YC, le Cercle Y qui sera l'inscrit, & de l'ouverture YE ou YF, le Cercle Z, qui sera le circonscrit.

D E M O N S T R A T I O N.

Car le Point Y étant évidemment le milieu du Quarré EFGH par les précéd., on conclut de là que la circonference du Cercle Y, décrit de l'ouverture YB, touche les côtez de ce Quarré aux Points A, B, C, D, & que la circonference du Cercle Z, passe par les Pointes des Angles de ce Quarré, & qu'ainsi on a fait; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION X.

PROBLEME

DEcrire un Triangle Ifoſcele qui ait cha- *Plan-*
que Angle à baſe double de celui du *che 1*
ſommet. *13 fig.*

PREPARATION.

Diviſés par 11. 2, une Ligne comme AC, de manière que le Rectangle, compris ſous la toute AC & la plus petite de ſes parties CB, ſoit égal au Quarré de l'autre partie AB, enſuite décrits du Point A, de l'ouverture AC, le Cercle Z, auquel vous appliquerez DC égale à BA; joignés le Rayon AD, & par 5. décrits le Cercle X de ſorte que ſa circonſerence paſſe par les Points A, B, D, joignés DB.

Il ne s'agit que de démontrer que l'Angle ADC ou ACB, eſt double de l'Angle DAC, parce que le Triangle DAC, eſt Iſoſcele par la Défin. du Cercle.

DEMONSTRATION.

Parce que le Quarré de BA ou de DC est égal, par constr., au Rectangle compris sous CA, CB, il s'ensuit par le Coroll. 3. de la Prop. 28. du Liv. 3, que la Ligne DC est touchante au Cercle X, & par la Prop. 24. du même Liv. que l'Angle BDC est égal à l'Angle DAC, & par le Coroll. 5. de la Prop. 16. du Liv. 1. que l'Angle DBC est égal à l'Angle ADC, à cause du commun C, aux deux Triangles DBC ADC, qui à présent sont Equiangles & Isosceles, par consequent DB est égale à DC, où à BA, d'autant que DC l'est par constr. à BA, or DB étant égale à BA il s'ensuit que le Triangle DBA est aussi Isoscele, & qu'enfin les Angles BAD, BDA étant égaux, l'exterieure DBC ou par égalité DCB où CDA est, par le Coroll. 1. de la Prop. 16. du Liv. 1., double de celui du sommet DAC; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Inscrire dans le Cercle donné X. un Pen-12 *fig.*
tagone Regulier.

PREPARATION.

Décrivés par la précédente un Triangle 14 *fig.*
Isocele qui ait chaque Angle à la bāse dou-
ble de celui du sommet; & par 2 inscrivés 12 *fig.*
dans ce Cercle donné le Triangle ABC
Equiangle au premier, & par 9, 1. divisés
les Angles CAB, CBA en deux également,
puis joignés les Droites qui terminent le
Pentagone qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car les Angles CAE, EAB, DBA, CBD;
A CB étant égaux entr'eux par constr. on
connoît aisément par le Coroll. 1. de la
Prop. 17, du Liv. 3. qu'ils sont soutenus
par des Arcs égaux, dont les Cordes ou cô-
tez du Pentagone le sont aussi par son Co-
roll. 6., & qu'enfin ce Pentagone est Ré-
gulier & inscrit dans le Cercle donné X

comme il est évident; ce qu'il falloit faire
& démontrer.



PROPOSITION XII.

P R O B L E M E.

Plan- **C** Irconscrire un Pentagone au Cercle
che 2. *Z*
16 fig.

PREPARATION.

Inscrivés y par la précédente le Penta-
gone ABD, & tirés par les Pointes des An-
gles de ce Pentagone, les Touchantes HG,
HY, YK &c, qui termineront celui qu'on
cherche.

DEMONSTRATION.

Car si du Centre Z on tire aux Points
d'attouchement A, B, C, D, E des Ra-
yons, on connoîtra aisément par 8, 1. que
les cinq Triangles, Ifofceles qui composent
le Pentagone inscrit, sont égaux en tous
sens, & que par consequent les Angles à
leurs bâses sont égaux entr'eux, & par l'A-
xiome 5. du Liv. 1. que les Angles aux bâ-
ses des cinq Triangles EGA, AHB, &c,
le

le font auffi, à cause des Angles Droits compris entre les Rayons & les Touchantes, & par 5, 1 que ces cinq derniers Triangles font Iſoſceles & par 20, 1. qu'ils font égaux en tout ſens, auffi bien que les Angles G, H, Y, K, L , & par égalité que les Droites GH, HY, YK, KL, LG font égales entr'elles, & qu'enfin elles terminent le Pentagone qu'on avoit dit de circonſcrire au Cercle donné Z ; ce qu'il falloit faire & démontrer.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit, que pour inſcrire ou circonſcrire un Cercle à un Pentagone, comme par exemple S , il n'eſt queſtion que de diviſer deux de ſes côtez en deux également comme HY, YK par les Perpendiculaires BZ, CZ & de décrire de leur Section Z , de l'ouverture ZB ou ZC , le Cercle Z qui lui ſera inſcrit, & de l'ouverture ZH ou ZK le Cercle X qui lui ſera circonſcrit.

DEMONSTRATION.

Car étant évident par 8. & 9. & par la précéd. que ce Point Z eſt également éloigné des Points G, H, Y, K, L , comme auffi des Points A, B, C, D, E , on conclut que; &c.



PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Inscrire un Hexagone Regulier dans le Cercle, donné O,

PREPARATION.

*Plan-
che I.
9 fig.*

D'un Point quelconque D, de la circonférence décrivés de l'ouverture du Rayon OB, l'Arc EOC, puis de la Section E décrivés de la même ouverture l'Arc DOF, & tirés des Points F, E, D, par le Centre O, les Droites FOC, EOB, DOA, & joignés les Droites FE, ED, DC, &c. qui termineront le Hexagone qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car les Droites qui joignent les Points F, E, O, D, C étant égales entr'elles par Défin. du Cercle on conclut évidemment par 1, 1 que les Triangles F, G, H, sont Equilateraux, & par 8, 1 qu'ils sont égaux en tout sens & par 15, 1 que les Angles opposez au sommet O sont égaux entr'eux, & par 4, 1 que les six Triangles représentez en la figure sont égaux en tout sens, &
par

GEOMETRIE. LIV. IV. 139

par consequent équilatéraux, de sorte que leurs bâses étant égales entr'elles, on a raison de dire qu'elles terminent le Hexagone, qu'on cherche; ce qu'il falloit faire & démontrer.

COROLLAIRES.

I.

D'où il suit que le Rayon d'un Cercle *même* est égal au côté du Hexgone qui lui est in-*figure*, scrit, ou bien que le Rayon d'un Cercle pris six fois égale le Contour, du Hexagone qui lui est inscrit.

II.

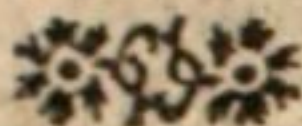
Il suit encore de cette Proposition que ^{2 fig.} pour inscrire un Triangle Equilateral dans un Cercle donné E, il n'est question que de lui inscrire un Hexagone, puis joindre les Droites AC, AB, BC qui sont égales entr'elles & qui terminent le Triangle ACB qui par 1, 1 est Equilateral, car les Arcs AO, OC, CG, &c, étant égaux entr'eux par la précédente, comme aussi leurs doubles AOC, CGB, BDA, on connoît aisément par le Coroll. 6. de la Prop. 17. du Liv. 3. que leurs Cordes AC, CB, BA le sont aussi; ce qu'il falloit démontrer.

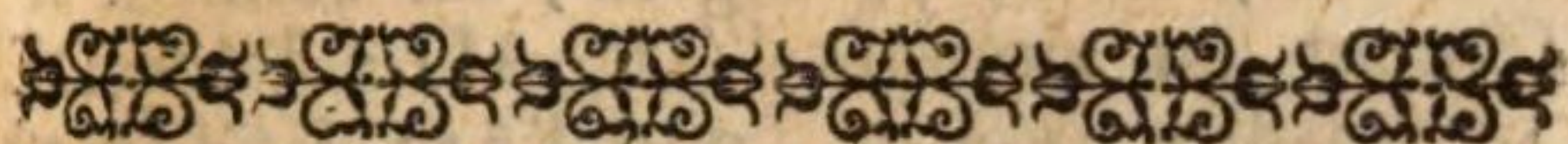
DE-

I I I.

*même
fig.*

J'ajoute que le côté AB , du Triangle Equilateral ACB , inscrit dans le Cercle E , rétranche le Quart FD , de son Diametre CD , que je suppose être Perpendiculaire à ce côté AB ; car le Diametre CD étant Perpendiculaire à AB , on conclut évidemment par la Défin. 11 . du Liv. 1 , que le Point D est également éloigné des Points A , B , & par la précéd. que le Triangle ADE est Equilateral, & qu'enfin AF étant Perpendiculaire au Rayon ED , le Point F est, par la Défin. 11 , du Liv. 1 , le milieu de ce Rayon ED , & que par consequent FD , est le Quart du Diametre CD .





PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

INscrire un Pentedecagone Regulier ou *Plan-*
Figure de quinze côtés dans le Cercle *che 2.*
donné X. *17 fig.*

PREPARATION.

Inscrivés lui par le Coroll. 2. de la Prop.
13. un Triangle Equilateral A B C, & par
11. un Pentagone V, en sorte que La poin-
te de son Angle V A D soit aussi La Pointe
de l'Angle B A C de ce Triangle, & alors
l'Arc B F ou E C fera la quinzième partie de
la circonference de ce Cercle, de sorte que
si on y applique quinze Lignes comme est
B F ou E C, elles termineront la Figure
qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car la circonference de ce Cercle étant
divisée en trois parties égales par les Poin-
tes A, B, C, de ce Triangle Equilateral,
dont chacune, comme est A D C, est de
120. degrés par Défin. 10, 1, & en cinq
parties égales par les Pointes de ce Penta-
gone dont chacune, comme est A D ou
D M C E

DMCE, est de 72 degrés, on connoît aisément en ajoutant l'Arc AD à l'Arc DE c'est-à-dire 72 à 72, que l'Arc ECDA est de 144. degrés, & que si de cet Arc, c'est-à-dire de 144. degrés, on rétranche l'Arc ADC, qui est de 120. degrés, le reste... 24. degrés est la valeur de l'Arc EC qui est bien la 15, partie de cette circonference, puisqu'en divisant sa valeur 360, par 15, le quotient est 24, par conséquent, si dans ce Cercle on applique encore quatorze Cordes ou Lignes, comme est EC, elles termineront, comme il est évident, le Pentecagone qu'on cherche VEW; ce qu'il falloit faire & démontrer.

Fin du Livre quatrième.





ELEMENTS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE CINQUIEME

EUCLIDE n'ayant traité que simplement des Plans dans les quatre Livres précédens, son dessein dans celui-ci, est de traiter de cette Logique Mathématique, c'est à-dire des Raisons & des Propositions, afin que dans le sixième il puisse nous donner une entière connoissance des Plans.

Comme cette façon d'argumenter est absolument nécessaire, il est bon de dire qu'ou-
tre

tre que ce Livre est le fondement du fixième & des autres, & des plus essentielles parties de Mathématique celui qui l'ignore ne peut se dire Mathematicien, c'est pourquoi je tache d'en expliquer les Définitions le plus nettement qu'il m'est possible, comme aussi d'en démontrer les Propositions.



Ce que c'est que raison & proportion.

Raison, Rapport où Comparaison, c'est presque une même chose, si bien que ce mot Raison ou Rapport, ne signifie proprement que ce qu'une Grandeur est à l'égard d'une autre Grandeur selon la quantité, c'est-à-dire selon qu'on remarque que peut-être l'une, quand on la compare avec l'autre; comme si en considérant un chemin, en même temps je le compare avec un autre chemin, ce qui me fait concevoir que l'un est plus long que l'autre ou qu'il est plus court, selon que je puis remarquer la longueur de l'un & de l'autre.

Remarqués bien que ces sortes de comparaisons ne se font que lorsque les Grandeurs que l'on compare ensemble sont de même genre, ou de même espèce; en effet, il est évident qu'on ne peut remarquer aucune raison ou rapport entre une Ligne & une Surface, ou entre une Surface & un Corps, d'autant que la Ligne est sans largeur

geur & que la Surface en a une, & qu'enfin la Surface est sans épaisseur & que le Corps en a une.

Remarqués encore que lorsque l'on considère deux Grandeurs de même genre, on y apperçoit autre chose que de l'égalité où de l'inégalité, de la petitesse où de l'excès.

C'est ce qui est bien vrai, puisqu'en considérant par exemple le nombre A 30, à l'égard du nombre B 20, je ne puis concevoir autre chose, si non que le nombre A est égal au nombre B, ou que ce nombre B est plus petit que ce nombre A, si ce nombre A est plus grand que le nombre B.

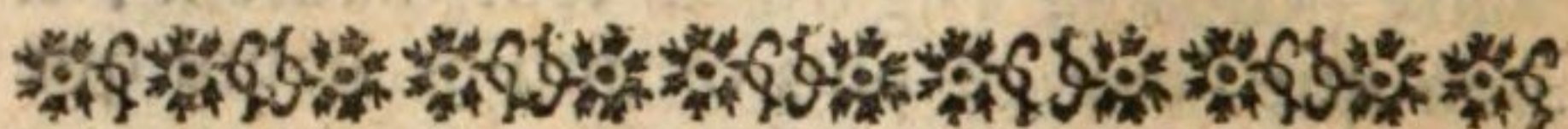
De même qu'en considérant par exemple deux Colonnes, je ne puis concevoir autre chose à l'égard de leur hauteur, si non que l'une est plus ou moins haute que l'autre suivant l'excès que je puis remarquer de l'une sur l'autre.

De plus soient ces deux nombres 20, 4; donc si l'on considère ce que l'un est à l'égard de l'autre, on connoîtra que l'excès du premier 20, sur le second 4 est précisément 16, où que le nombre 20, contient cinq fois le nombre 4, & que la raison de 20 à 4 est égale à celle de 5 à 1, Car comme 20 contient cinq fois le nombre 4. de même 5. contient cinq fois l'unité 1.

Rémarqués en passant que 5 & 1 sont appelez les Exposans de la raison de 20 à 4, parce que 5 & 1 sont les plus petits nombres qui puissent être entr'eux comme les termes 20, 4 de cette raison; de sorte que si on propose encore les deux nombres

3, 12, les suivans 1, 4 seront les Exposans de leur raison puisque ces derniers, 1, 4 sont les plus petits qui puissent être entr'eux comme les termes 3, 12 de cette raison; Car comme 3 est égal au quart de 12. de même 1 est égal au quart de 4. &c.

Je remarque par cette Définition que l'Exposant d'une raison n'est autre chose que le quotient de la division de ses termes; Car par exemple divisant le nombre 48 par 6, le quotient 8, comparé à l'unité nous fait connoître que la raison de 48 à 6 est comme celle de 8 à 1, où que 6 est contenu huit fois dans 48, & qu'ainsi 8 est véritablement l'Exposant de la raison de 48. à 6 &c.



D E F I N I T I O N S

I.

*Liv. 1.
Plan-
che 3.
28 fig.*

UNE Quantité comparée avec une plus grande, s'appelle partie de la grande, comme en effet 8 est partie de 24, ou la Ligne EF de quatre pieds, comparée avec DG de cinq pieds, est partie de DG; quoiqu'on ignorât la grandeur de EF cela n'empêcheroit pas qu'elle ne fut partie de DG, si elle est plus petite; car si par 3, 1, on retranche de DG une Ligne DY, égale à EF, il est très évident que DY où EF sera partie de DG.

I I,

I I.

On fait une distinction de la partie, en ce qu'on appelle Partie Aliquote une quantité qui étant comparée avec une plus grande, mesure précisément cette plus grande, c'est-à-dire lorsqu'étant prise un nombre de fois, elle égale cette plus grande, comme par exemple le nombre 4. qui pris six fois mesure où égale 24.

La Partie Aliquante differe de l'Aliquote, en ce que l'Aliquante ne mesure pas précisément la plus grande, c'est-à-dire que prise un certain nombre de fois elle surpasse, ou est plus petite que la plus grande, comme 7 qui pris trois fois surpasse 20 & pris deux fois est plus petit.

On sçaura donc que 4 est Partie Aliquote de 24, & que 7 est Partie Aliquante de 20; & ainsi de toutes autres choses semblables.

I I I.

La Multiple est une Grandeur qui contient précisément une autre Grandeur, je veux dire un nombre de fois.

On sçaura donc que 12. est multiple de 2. parce que 2., pris six fois égale 12., & qu'une Ligne de vingt pieds est multiple d'une de quatre pieds, parce que celle de quatre pieds prise cinq fois, mesure précisément celle de vingt pieds,

I V.

3 - 9 On appelle Equimultiples les Grands
1 - 3 deurs qui contiennent également
leurs parties Aliquotes de sorte que le nombre
3 contenant trois fois sa partie Aliquote
1, tout comme 9 contient trois fois la
sienne 3; 3 & 9 seront appelez Equimultiples
de 1 & 3.

V.

Une Raison qui s'exprime en nombres
s'appelle raison de nombre à nombre, ou
Commensurable, puisqu'effectivement une
Grandeur peut contenir ou être contenuë,
dans une autre Grandeur; car il est évident
qu'une Ligne de 24. pieds contient précieusement
trois fois une de 8. pieds, & que la
raison d'avec celle de 8 pieds est de nombre
à nombre, puisqu'elle s'exprime ainsi, 24 est à 8
comme 3 est à 1, car comme 24 contient trois fois 8
de même 3 contient trois fois 1.

V I.

Une Raison qui ne peut s'exprimer en
nombres s'appelle raison Sourde ou Incommensurable,
de sorte que si entre deux grandeurs, on ne peut
trouver de commune mesure pour grande ou petite
qu'elle puisse être, je veux dire une quantité qui
prise un nombre de fois ne puisse mesurer
précisément ces deux grandeurs, en ce cas
elles

elles seront appellées Incommensurables.

V I I.

$A - B :: C - D$ On dit que des Raisons
 $4 - 6 :: 8 - 12$ font égales, lorsque leurs
 $I \frac{1}{2} \text{ --- } I \frac{1}{2}$ exposans font égaux ;
 de sorte que si l'expo-
 sant de la raison de A à B, est égal à l'ex-
 posant de la raison de C à D ; la raison de
 A à B, sera égale à celle de C à D.

V I I I.

$A - B :: C - D$ L'égalité des raisons se
 $4 - 2 :: 6 - 3$ nomme Proportion, de
 $9 - 3 :: 6 - 2$ sorte que si la raison de
 $8 - 2 :: 4 - 1$ A à B est égale à celle
 de C à D, ces quatre Grandeurs A, B,
 C, D seront proportionnelles ; de manié-
 re que pour parler plus généralement, il
 faut que si l'Antecedent A est double du
 Consequent B, que l'Antecedent C soit aus-
 si double du Consequent D, ou que si A est
 triple de B, que C soit aussi triple de D, ou
 que si A est quadruple de B, que C soit
 aussi quadruple de D, ou qu'enfin si A est
 moitié ou tiers ou quart de B, il faut que
 C soit aussi moitié ou tiers ou quart de D,
 pour que les quatre Grandeurs A, B, C, D
 soient en Proportion ou dites proportionnel-
 les.

I X.

Il suit de cette Définition que pour que quatres Grandeurs soient en proportion ou proportionnelles, il faut que la première soit contenuë, ou contienne, ou soit telle partie de la seconde que la troisième est contenuë, ou contient, ou est telle partie de la quatrième &c.

X.

Remarqués que toute Raison suppose deux termes, dont le premier se nomme & a été nommé Antecedent, & le second Consequent, enforte que si on faisoit encore comparaison de X à Z cette Raison ou rapport auroit pour Antecedent, la quantité X & la quantité Z pour Consequent; tout au contraire si on faisoit comparaison de Z à X, cette raison auroit présentement pour Antecedent la quantité Z, & la quantité X pour Consequent.

X I.

Il suit de cette Définition que la Proportion à deux Antecedens, & deux Consequens, puisque par sa Définition elle est composée de deux raisons égales ou semblables, dont chacune suppose deux termes, sçavoir un Antecedent & un Consequent, ainsi vous voyés que la Proportion en doit avoir quatre, c'est-à-dire deux Antecedens, & deux Consequens, cependant trois termes

mes peuvent suffire d'autant que le même terme peut servir de Consequent & d'Antecedent car si par exemple ces quatre nombres 4-8::8-16 sont en Proportion, il sera aisé de remarquer que le même terme 8 sert de Consequent à la première raison, & d'Antecedent à la seconde, & en ce cas, cette Proportion se nomme continuë ou continuellement Proportionnelle & se marque ainsi ::4. 8. 16.

X I I.

Que ces quatre termes 5-3::10-6 soient en Proportion, afin que l'on puisse remarquer en passant que le premier 5 & le dernier 6 s'appellent les extremes & le second 3 & le troisième 10 les moïens.

X I I I.

On appelle Grandeurs Homologues les Antecedens aux Antecedens, & les Consequens aux Consequens, ainsi les Antecedens 5, 10 seront donc Homologues comme aussi les Consequens 3, 6.

X I V.

Lorsque trois Quantités sont continuellement Proportionnelles, on dit que la raison de la première à la troisième où dernière, est doublée de celle de la première à la seconde, ou de celle de la seconde à la dernière, ou qu'elle est composée de la raison
K 4 de

de la première à la seconde & de celle de la seconde à la troisième.

Rémarqués bien qu'entre raison double & Doublée il y a bien de la différence, car par raison double nous entendons par exemple que 6 est double de 3 & par raison Doublée, on doit entendre que c'est une raison composée de deux raisons égales, & par raison triple nous savons que 9 est triple de 3 & par raison Triplée on doit remarquer que l'on entend une raison composée de trois raisons égales & ainsi ensuite &c.

Si bien qu'une raison est dite Doublée lorsqu'elle est composée de deux raisons égales & qu'une raison est dite Triplée lorsqu'elle est composée de trois raisons égales.

X V.

Une Raison Composée est faite de deux ou de plusieurs raisons multipliées les unes par les autres, je veux dire par leurs exposans, comme si l'on confideroit par exemple la raison Octuple, composée ou faite de l'exposant de la raison double qui est 2, multiplié par l'exposant de la quadruple qui est 4 dont le produit 8 est évidemment l'exposant de la raison Octuple car 4 fois 2 font 8.

Pour plus d'intelligence soient par exemple proposez ces quatre nombres 3, 6, 18, 72; on voit déjà que l'exposant de la raison de 3 à 6 est 2, puisque c'est une raison double, & que l'exposant de la raison de 6 à 18 est 3, puisque c'est une raison triple
&

& qu'enfin l'exposant de la raison de 18 à 72 est 4, car c'est une raison quadruple, & qu'en multipliant ces exposans 2, 3, 4 l'un par l'autre, c'est-à-dire 2 par 3, puis le produit 6 par le troisième 4, le produit 24 est évidemment l'exposant de la raison de 3 à 72, car comme l'unité 1 est contenue vingt quatre fois en 24, de même le nombre 3 est contenu vingt quatre fois en 72, d'où il s'ensuit par les raisons précédentes que la raison de 3 à 72 est composée de celle de 3 à 6, de celle de 6 à 18 & de celle de 18 à 72.

Par consequent si on propose encore ces trois nombres 4, 5, 6, il sera facile de connoître que la raison de 4 à 6 est composée de la raison de 4 à 5 & de celle de 5 à 6, si on considere que l'exposant de celle de 4 à 5 est $1\frac{1}{4}$, car outre que 4 est contenu une fois en 5, il y est encore un quart de fois, & que l'exposant de la raison de 5 à 6 est $1\frac{1}{5}$, car outre que 5 est contenu une fois en 6, il y est encore un cinquième de fois, & qu'enfin multipliant ces exposans $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$ l'un par l'autre, après avoir réduit chaque entière en sa fraction pour plus de facilité, le produit $\frac{3}{20}$ ou $1\frac{1}{5}$ est l'exposant de 4 à 6, car outre que 4 est contenu une fois en 6, il y est encore une demi fois.

Ces trois exemples suffisent ce me semble pour faire comprendre que, dans une suite d'autant de Grandeurs que l'on voudra, la raison de la première à la dernière, est composée de toutes les raisons particulières, c'est-à-dire de cel-

le de la première à la seconde, de celle de la seconde à la troisième, de celle de la troisième à la quatrième & de celle de la quatrième à la cinquième &c.

X V I.

On a dit qu'une Raison composée de deux raisons égales étoit dite Doublée de chacune; de sorte que si par exemple les trois quantités A, B, C, ou les trois nombres 2, 4, 8, sont continuellement proportionnelles, la raison de la première à la dernière, fera donc doublée de celle de la première à la seconde, ou de celle de la seconde à la troisième;

A. B. C Car celle de la première à la troisième, étant composée de celle de la première à la seconde & de celle de la seconde à la troisième, il suit de la remarque faite sur la Déf. 14, que la raison de la première à la troisième, est doublée de celle de la première à la seconde, ou de celle de la seconde à la troisième, parce qu'on suppose que la raison de A à B est égale à celle de B à C.

On a encore ajouté qu'une Raison composée de trois raisons égales, étoit dite Triplée de chacune, de sorte que si les quatre grandeurs A, B, C, D ou les quatre nombres 3, 9, 27, 81 sont continuellement proportionels, la raison du premier au quatrième sera donc Triplée de la raison du premier au second, ou de celle du second au troisième, ou de celle du troisième au quatrième.

A-B-

:: A - B - C - D Car outre que ces
 :: 3 - 9 - 27 - 81 raisons sont égales,
 par supp. celle du premier au quatrième est
 composée de toutes, qui en cas ce est tri-
 plée de chacune par la remarque faite sur la
 Définition. 14.

XVII.

A. B. :: C. D Les quatre Grandeurs
 4. 8. :: 12. 24 A, B, C, D, de-
 2. 8. :: 6. 24 meureront en propor-
 16. 8. :: 48. 24 tion, quoique l'on les
 32. 8. :: 96. 24 change de place, en
 un mot quoique l'on les multiplie, ou
 qu'on en soustrait, pourvu que la raison
 du premier Antecedent à son Consequent,
 soit égale à celle du second Antecedent à
 son Consequent; en sorte que si par exem-
 ple A est moitié de B, il faut que C soit
 aussi moitié de D, ou que si A est quart
 de B, que C soit aussi quart de D, ou
 que si A est double de B, que C soit aussi
 double de D, ou que si A est quadruple
 de B que C soit aussi quadruple de D,
 & ainsi ensuite, pour que les quatre Gran-
 deurs A, B, C, D restent en proportion,

XVIII.

A. B. Les Quantitez C, D, sont apellées
 3. 6 semblables parties Aliquotes, si elles
 C. D sont contenuës également dans leur
 1. 2 tout A, B ou 3, 6; ainfiles Quan-
 tités 1 & 2, étant contenuës trois fois
 dans

dans leur tout 3, 6, seront apellées semblables parties Aliquotes.

X I X.

Si aux consequens des quatre Quantités Proportionnelles E, F, G, H, on ajoute au premier F, deux fois sa partie Aliquote C, il faut qu'on ajoute de même au second consequent H, deux fois la sienne D, pour que les quatre Grandeurs E, F, G, H restent encore en proportion ;

E. F :: G. H Car si E est par exemple le tiers de F, G le sera aussi de H par la Définition de la proportion, donc si au consequent F, on ajoute deux fois sa partie Aliquote C, & que C fasse par exemple les deux tiers de F, E sera à FC comme 1 à 5, puisque par supposition F vaut trois fois la partie ou Antecedent E, & C le vaut deux fois ; par consequent E faisant la cinquième partie de FC, il faut que G le fasse aussi de HD, pour que de part & d'autre il y ait égalité, de raisons ; ainsi G étant le tiers de H, on conclut évidemment par la Définition de la proportion, que D en est les deux tiers, d'autant que, par l'Hypothèse, E étant à F comme G à H, G doit être à HD comme E à FC ; par consequent C, D faisant chacun les deux tiers de leur tout F, H, il s'ensuit par la Définition précédente que leur moitié en sont semblables parties Aliquotes, & qu'enfin E est encore à FC comme G à HD.

X X.

Si les quatre Grandeurs A, B, C, D, sont Proportionnelles, je dis que l'Antecedent A est à l'Antecedent C comme le consequent B au consequent D.

A. B :: C. D Car si A est moitié de B,
 3. 6 :: 4. 8 C le fera aussi de D par la
 A. C :: B. D Défin. de la proport., ain-
 3. 4 :: 6. 8 si la moitié ou A fera, par
 égalité, à la moitié ou C, comme le tout
 B au tout D.

Dans cet exemple on a fait, comparaison des Antecedens, comme aussi des consequens, & en ce cas cette façon d'argumenter s'appelle Alterne.

X X I.

Si la raison de A à B est égale à celle de C à D, je dis que celle de B à A, est encore égale à celle de D à C.

A. B :: C. D Car si par exemple A est
 4. 8 :: 2. 4 moitié de B, C le fera
 B. A :: D. C aussi de D, ainsi la moitié
 8. 4 :: 4. 2 A étant à son double B,
 comme la moitié C à son double D, on
 conclut par égalité, que le double B est à
 sa moitié A, comme le double D à sa moi-
 tié C.

Dans cet exemple les Consequens sont devenus Antecedens, & en ce cas cette façon d'argumenter se nomme Inverse.

XXII.

X X I I.

Si les quatre Quantités A , B , C , D sont Proportionnelles , je dis que les quatre AB, B , CD , D le sont aussi.

A. B :: C. D Car si A est moitié de B,
 3. 6 :: 7. 14 C le sera aussi de D, donc
 AB. B :: CD. D si à A , on ajoute son
 9. 6 :: 21. 14 double , c'est-à-dire B ,
 & que de même à C on ajoute le sien , qui
 est D , il s'ensuivra évidemment que , com-
 me AB contiendra une fois & demi B , CD
 contiendra aussi une fois & demi D , &
 qu'enfin la raison de AB à B sera égale à
 celle de CD à D , & en ce cas les quatre
 Grandeurs AB , B , CD , D sont propor-
 tionnelles.

*Cette façon d'argumenter se nomme Compo-
 ser , parce qu'on a fait comparaison de l'Ante-
 cedent joint au Consequent au même Conse-
 quent.*

X X I I I.

Il suit de cette précédente que si la rai-
 son de AB à B est égale à celle de CD à
 D ; celle de A à B sera aussi égale à celle de
 C à D ;

AB. B :: CD. D Car si par exemple AB
 12. 6 :: 8. 4 est double de B , CD ,
 A. B :: C. D le sera aussi de D ; par
 6. 6 :: 4. 4 consequent si de AB
 on ôte sa moitié , B , comme aussi de CD
 sa moitié D , il est évident que , comme le
 reste

GEOMETRIE. LIV. V. 159

reste ou moitié A est égal à la moitié B, le reste ou moitié C est aussi égal à la moitié D, & qu'ainsi la raison de A à B est égale à celle de C à D.

Cette façon d'argumenter se nomme Diviser parce qu'on a fait comparaison de l'excès de l'Antecedent sur le Consequent, au même Consequent.

XXIV.

Si la raison de AB à B est égale à celle de CD à D., je dis que celle de B à A est aussi égale à celle de D à C.

AB. B :: CD. D	Car en divisant, celle de
9. 6 :: 12. 8	A à B est égale à celle
A. B :: C. D	de C à D, & par la
3. 6 :: 4. 8	raison inverse celle de
B. A :: D. C	B à A est égale à celle
6. 3 :: 8. 4	de D à C donc &c.

Cette façon d'argumenter s'appelle Conversion de Proportion.

XXV.

Si on propose deux rangs de termes, comme par exemple D, E, F-G, H, Y, en sorte que le premier D soit au second E, comme le quatrième G, au cinquième H & le second E, au troisième F, comme le cinquième H, au sixième Y., je dis que le premier D est au troisième F, comme le quatrième G au sixième Y.,

D. E.

D. E. F---G. H. Y Car la raison de D à 2. 4. 6---4. 8. 12 F, est composée de celle de D à E & de celle de E à F, & la raison de G à Y est composée de celle G à H & de celle de H à Y, par conséquent ces dernières raisons étant, par l'Hypothese, égales aux premières, il s'ensuit que la raison de D à F, est aussi égale à celle de G à Y, car ces raisons de D à F, de G à Y étant composées d'égales raisons, leurs exposans le sont aussi, & sont par conséquent égales par Défin. 7.

Cette façon d'argumenter se nomme par Proportion d'égalité bien rangée; dans la quelle on a comparé les quantités extrêmes en laissant les moïennes.

X X V I.

La Proportion d'égalité mal-rangée; differe de la précéd., en ce que dans celle ci les termes sont comparez avec un ordre différent, sçavoir en cette sorte; soient proposez les deux rangs de termes A, B, C--D, E, F, de manière que la raison de A à B soit égale à celle de E à F, & celle de B à C égale à celle de D à E, la raison de A à C fera encore égale à celle de D à F.

A. B. C--D. E. F Car celle de A, à C 4. 8. 2--12. 3. 6 étant composée de celle de A à B & de celle de B à C, & celle de D à F, de celle de D à E, égale par supp. à celle de B à C, & de celle de E à F, égale à celle de A à B, il suit de la précédente

te & de la Définition 7., que la raison de A à C est égale à celle de D à F &c.

Quoiqu'on ait expliqué & démontré, par les Définitions précédentes, l'essentiel de cette Logique Mathématique, néanmoins on a jugé à propos de rapporter ici en général, tout ce qu'on en a dit, afin qu'on puisse se rapeller toutes ces façons d'argumenter.

A.	B ::	C.	D	Si la raison de A à B
4.	6 ::	10.	15	est égale à celle de C
A.	C ::	B.	D	à D; celle de A à C
4.	10 ::	6.	15	le sera aussi à celle de
B.	A ::	D.	C	B à D par la Raison
6.	4 ::	15.	10	Alterne; & par la
AB.	B ::	CD.	D	Converse celle de B à
10.	6 ::	25.	15	A le sera encore à cel-
A.	B ::	C.	D	le de D à C; & par
4.	6 ::	10.	15	Composition celle de
AB.	A ::	CD.	C	AB à B sera égale à
10.	4 ::	25.	10	celle de CD à D; &
A.B.C ::	D.E.F			en Divisant la Raison
2. 4. 6 ::	4. 8. 12			de A à B sera égale à
A.	C ::	D.	F	celle de C à D; & par
2.	6 ::	4.	12	la Conversion, la raison
A.B.C ::	D.E.F			de AB à A sera égale à
4. 8. 2 ::	12. 3. 6			celle de CD à C; &
A.	C ::	D.	F	par la raison d'égalité
4.	2 ::	12.	6	bien rangée; la raison
de A à B étant égale à celle de D à E, &				
celle de B à C à celle de E à F; celle de				
A à C sera égale à celle de D à F; & par				
la raison d'égalité mal rangée la raison de				
A à B étant égale à celle de E à F, & cel-				
L				le

le de B à C à celle de D à E, celle de A à C la fera auffi à celle de D à F.



D E M A N D E

Ou plutôt Proposition évidente.

Les trois Quantités A, B, C, étant données, on est obligé d'accorder un Quatrième X, à laquelle la Quantité C aura même raison que A a à B;

A. B. C. X Car si par exemple de 4 4. 5. 12. 15 frans d'exposez on en retire 5, il est évident que de 12 on en retirera 15, parce qu'en retirant 5 frans, de 4 d'exposez, on retire son argent & le quart de son argent, ainsi de 12. d'exposez on doit aussi en retirer son argent, c'est-à-dire 12 plus le quart de ces 12 c'est-à-dire 15; on voit donc que trois Quantités étant données, on en peut trouver une quatrième à laquelle la troisième aura même raison que la première A a à la seconde, puisqu'il ne s'agit que de multiplier la seconde par la troisième & diviser le produit par la première, car le quotient est la quatrième.

Comme les six premières Propositions sont inutiles, nous commenceront par la septième.

PRO-



PROPOSITION VII.

THEOREME.

SI les Quantités A, B sont égales, je dis, que si l'on propose une troisième X, la raison de la première A à cette troisième X est égale à celle de la seconde B à cette même X.

DEMONSTRATION.

A. X. B Parce que les Quantités A, B sont égales par supp., il s'enfuit que, si par exemple la Quantité X est plus petite que A, la raison de cette Quantité A à la Quantité X, est égale à celle de la Quantité B à cette même X, & que par conséquent les quatre Quantités A, X, B, X sont Proportionnelles; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il suit que les Quantités A, B sont égales, si elles ont une même raison à la troisième X; ou, ce qui est la même chose,

si cette troisieme X a même raison à la
Quantité A qu'à la Quantité B.



PROPOSITION VIII.

T H E O R E M E

SI les Quantités M, N sont inégales, je dis que, si on propose une troisieme Z, la raison de la Quantité M, qui est la plus grande, à la Quantité Z, est aussi plus grande que celle de la Quantité N à cette même Z.

Et que cette même Z a plus grande raison à la petite N qu'à la plus grande M.

DÉMONSTRATION

M. Z. N. Parce que la Quantité M est ;
7. 4. 6. par supp., plus grande que N,
il s'ensuit évidemment que M contient plus
de parties aliquotes de Z, que N n'en con-
tient de semblables de cette même Z, &
qu'ainsi M a plus grande raison à Z, que N
n'a à cette même Z ; ce qu'il falloit démon-
trer.

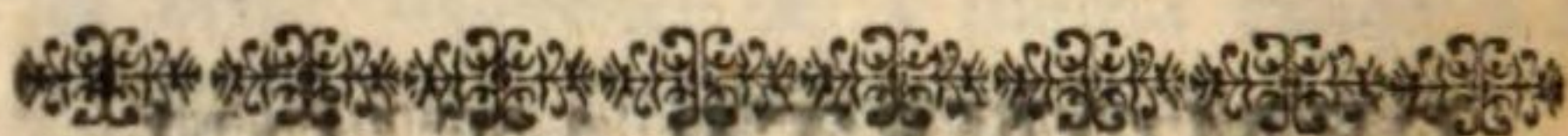
DEMONSTRATION.

Parce que la Quantité M est, par supp., plus grande que N , on connoît aisément par les raisons précédentes, que cette Quantité Z contient plus de fois quelques parties Aliquotes de N , qu'elle n'en contient de semblables de M , & qu'ainsi la raison de Z à N est plus grande que celle de cette même Z à M ; ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de cette Proposition que, si la raison de la Quantité M , à la Quantité Z , est plus grande que celle de N à cette même Z , M est plus grande que N ; & tout au contraire, si Z a plus grande raison à N qu'à M ; N est plus petite que M .





PROPOSITION IX.

THEOREME.

SI la raison de A à B est égale à celle de C à D, & celle de C à D à celle de E à F, je dis que celle de E à F l'est aussi à celle de A à B.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D :: E. F Car la raison de
 2. 4 :: 3. 6 :: 8. 16 A à B étant, par
 E. F :: A. B supp., égale à cel-
 8. 16 :: 2. 4 le de C à D &
 celle de C à D égale à celle de E à F, il
 s'ensuit par égalité, que celle de A à B l'est
 aussi à celle de E à F ou que celle de E à
 F l'est à celle de A à B; ce qu'il falloit
 démontrer.





PROPOSITION X.

THEOREME.

SI les Quantités A, B, C, D sont en proportion, je dis qu'il y a même raison d'un Antecedent comme A à son Consequent B, que de la somme des Antecedens A, C à la somme des Consequens B, D.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D Car en supposant que
 8. 12 :: 10. 15 A fasse les deux tiers
 AC. BD :: A. B de B, C les fera aussi
 18. 27 :: 8. 12 de D, parce que la
 raison de A à B est égale à celle de C à D
 par supp., par conséquent comme la Quan-
 tité A fait les deux tiers de B & la Quan-
 tité C les deux tiers de D, il s'ensuit évi-
 denment que A plus C fait aussi les deux
 tiers de B plus D, & qu'enfin, A faisant
 les deux tiers de B, il y a même raison
 entre les Quantités ou Antecedens A, C, &
 Consequens B, D qu'entre l'Antecedent A &
 le Consequent B; ce qu'il falloit démon-
 trer.

PROPOSITION XI.

T H E O R E M E.

L Es semblables Parties Aliquotes & les Equimultiples sont en même raison.

De sorte que si par exemple les Quantités C, D sont semblables Parties Aliquotes des Equimultiples E-F, je dis que la raison de C à D est égale à celle de E à F.

DEMONSTRATION.

E.	F	Car si C, Partie Aliquote
6.	9	de E, fait le tiers de E;
C	D	D, Partie Aliquote de F,
2.	3	fera aussi le tiers de F par
C. D :: E.	F	la Défin. 18, & la raison
2. 3 :: 6. 9		du tiers C au tiers D sera,
		par égalité, égale à celle du tout E au tout
		F; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XII.

THEOREME

SI les Tous A, B sont en même raison que les Parties retranchées C, D, les restantes E, F, seront encore en même raison que les Tous A, B.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D Car la raison de A à B étant
 6. 3 :: 2. 1 égale à celle de C à D par
 E. F :: A. B supp. & celle de A à C
 4. 2 :: 6. 3 égale à celle de B à D par
 la raison Alterne, il s'ensuit que, si A est
 triple de C, B l'est aussi de D, & qu'en-
 fin y aiant même raison du tout A au tout
 B que du tiers C au tiers D, il y a aussi
 même raison du reste E: qui fait les deux
 tiers de A ou qui est double du tiers C; au
 reste F, qui fait les deux tiers de B ou qui
 est double du tiers D, que du tiers C au
 tiers D ou par égalité que du Tout A au
 Tout B; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

T H E O R E M E.

SI la raison de A à B est égale à celle de C à D, & celle de E à B à celle de F à D, je dis qu'il y a même raison de la première Quantité A, jointe à la cinquième E, à la Seconde B, que de la Troisième C, jointe à la Sixième F, à la Quatrième D.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D Car la raison de la première Quantité A à la
 9. 3 :: 6. 2 seconde B, étant égale à
 E. B :: F. D celle de la troisième C
 6. 3 :: 4. 2 à la Quatrième D, il
 AE. B :: CF. D s'ensuit par la Définition de
 15. 3 :: 10. 2 la Proportion. que si A est triple de B, C l'est
 aussi de D & qu'enfin si E est double de B, F est aussi double de D, parce qu'on suppose que la raison de E à B est égale à celle de F à D, par conséquent A étant égale à trois B & E à deux, il est évident que A plus E c'est-à-dire AE est égale à cinq B, & qu'ainsi AE est quintuple de B, comme aussi CF de D par les mêmes raisons; & qu'enfin la première Quantité A, jointe à

à la cinquième E, est à la seconde B, comme la troisième C, jointe à la sixième F, à la quatrième D; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIV.

THEOREME.

SI les quatre Quantités A, B, C, D sont en proportion, la plus grande A avec la plus petite D surpassera les deux B, C prises ensemble.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D	Car si de la Quantité A,
12. 4 :: 3. 1	on retranche la Quantité
G. H :: A. B	G égale à la Quantité C,
3. 1 :: 12. 4	& de B la Quantité H éga-
E. F :: A. B	le à D, G fera encore à
9. 3 :: 12. 4	H comme A à B; & G,
GD. CH	H étant ôtez de A, B,
4 4	les restes E, F seront en mê-
GDE. CHF	me raison que les tous A,
13. 7	B par 12; or A étant sup-
AD. BC	posée la plus grande des
13. 7	quatre Quantités A, B,
C, D il s'ensuit qu'étant plus grande que B,	
le reste E est aussi plus grand que le reste	
F, & que, G étant égale à C & H à D,	
G	

G avec D est égale à C avec H, & qu'enfin les trois Quantités G, D, E sont plus grandes, prises ensemble, que les trois C, H, F, d'autant qu'on a prouvé que E étoit plus grande que F; d'où il suit que la plus grande Quantité A avec la plus petite D surpasse les deux autres B, C à cause que la Quantité A est égale aux deux E, G, puisque ce sont ses parties, & que la Quantité B, l'est aux deux F, H &c.; ce qu'il falloit démontrer.

Les Propositions qui manquent dans ce Livre, sont suffisamment expliquées & démontrées par ses définitions.

Quoique les suivantes ne soient pas d'Euclide, cependant on a jugé à propos de les mettre ici, parce qu'elles ont le même usage que les siennes & que plusieurs les citent comme si elles en étoient.





PROPOSITION XV.

THEOREME.

SI la Quantité A à plus grande raison à B que C à D; par la Raison Converse B aura moindre raison à A que D à C.

DEMONSTRATION.

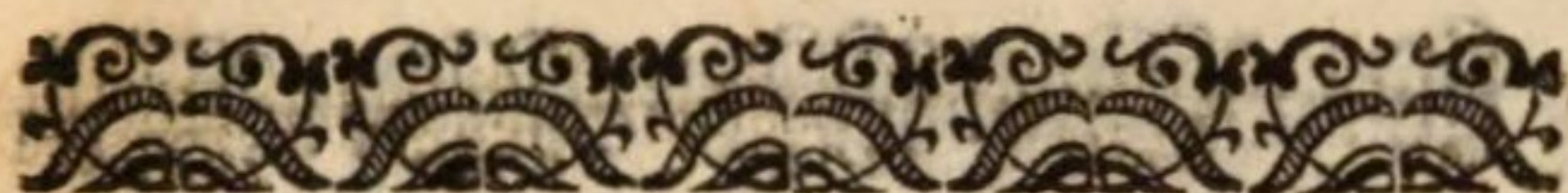
A. B :: C. D Car en faisant qu'il y ait
 10. 4 :: 8. 4 même raison de E à B que
 E. B :: C. D de C à D on connoitra ai-
 8. 4 :: 8. 4 sément par le Coroll. de la
 B. E :: D. C Prop. 8. que A est plus
 4. 8 :: 4. 8 grande que E, & par la
 B. A :: D. C raison Converse que la rai-
 4. 10 :: 4. 8 son de B à E est égale à
 celle de D à C ou que B contient autant
 de parties Aliquotes de E, que D en con-
 tient de semblables de C, mais que A étant
 plus grande que E, B contient moins de
 parties Aliquotes de A, que D n'en con-
 tient de semblables de C, & qu'ainsi B à
 moindre raison à A que D à C; ce qu'il
 falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

D'où il suit que si la raison de A à B est plus grande que celle de C à D, celle de A à C sera aussi plus grande que celle de B à D.

A. B :: C. D Car en faisant qu'il y ait
 5. 2 :: 4. 2 même raison de E à B que
 E. B :: C. D de C à D, on connoitra
 4. 2 :: 4. 2 aisément par la précéd. que
 E. C :: B. D E est plus petite que A,
 4. 4 :: 2. 2 & par la Raison Alterne
 A. C :: B. D que celle de E à C est en-
 5. 4 :: 2. 2 core égale à celle de B à D
 & qu'enfin, la Quantité A étant plus gran-
 de que E, la raison de A à C, est plus
 grande que celle de E à C, ou que celle de
 B à D; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XVI.

THEOREME.

SI A a plus grande raison à B que C à D, je dis qu'en composant, AB à aussi plus grande raison à B que CD à D.

DEMONSTRATION.

A. B :: C. D Car en supposant que la
 10. 4 :: 8. 4 raison de E à B soit éga-
 E. B :: C. D le à celle de C à D, on
 8. 4 :: 8. 4 connoîtra aisément par
 EB. B :: CD. D les raisons précédentes
 12. 4 :: 12. 4 que A est plus grande
 AB. B :: CD. D que E, & qu'en com-
 14. 4 :: 12. 4 posant, la raison de EB
 à B est égale à celle de CD à D; & qu'en-
 fin, A étant plus grande que E, la raison
 de AB à B, est aussi plus grande que celle
 de CD à D; ce qu'il falloit démontrer.

PRO-



PROPOSITION XVII.

THEOREME.

SI la raison de AB à B est plus grande que celle de CD à D, je dis qu'en divisant, celle de A à B est plus grande que celle de C à D.

DEMONSTRATION.

AB.	B.	CD.	D	Car en supposant que
14.	4.	12.	4	la raison de EB à B soit
EB.	B ::	CD.	D	égale à celle de CD à
12.	4 ::	12.	4	D, on connoitra aisé-
E.	B ::	C.	D	ment par les raisons
8.	4 ::	8.	4	précédentes que AB est
E		A		plus grande que EB, &
8		10		qu'en divisant, E est à B
A.	B.	C.	D	comme C à D, & qu'ô-
10.	4.	8.	4	tant la même grandeur

B des deux inégales AB, EB le reste E de la plus petite EB est aussi plus petit que le reste A de la plus grande AB, & qu'ainsi A a plus grande raison à B, que E à B, ou que C à D; ce qu'il falloit démontrer.

PRO-



PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

SI la raison de AB à B est plus grande que celle de CD à D, je dis que, par la Raison Converse, celle de AB à A est moindre que celle de CD à C.

DEMONSTRATION.

AB. B. CD. D Car en divisant on con-
 8. 4. 14. 8 noît par la précéd. que
 A. B. C. D celle de A à B est plus
 4. 4. 6. 8 grande que celle de C à
 B. A. D. C D, & par 15. que celle
 4. 4. 8. 6 de B à A est moindre que
 AB. A. CD. C celle de D à C, & en com-
 8. 4. 14. 6 posant que celle de AB
 à A est encore moindre que celle de CD
 à C; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XIX.

T H E O R E M E.

SI on propose les Quantités A, B, C, & les Autres D, E, F, de manière que la première A, ait plus grande raison à la seconde B, que la quatrième, D à la cinquième E, & que la seconde B ait plus grande raison à la troisième C que la cinquième E à la sixième F, je dis que la première A a aussi plus grande raison à la troisième C que la quatrième D à la sixième F.

DEMONSTRATION.

A. B. C - D. E. F Car en faisant qu'il
 8. 4. 2 - 6. 4. 3 y ait même raison
 G. B. Y - D. E. F de G à B que de D
 6. 4. 3 - 6. 4. 3 à E, on connoitra
 G. Y :: D. F que A est plus gran-
 6. 3 :: 6. 3 de que G, & que
 A. Y. G - Y. D. F Y est plus grande
 8. 3. 6 - 3. 6. 3 que C par 8, si on
 A. C - D. F suppose qu'il y ait
 8. 2 - 6. 3 même raison de B à
 Y que de E à F, & par la Raison d'égalité bien rangée, que celle de G à Y est égale à celle de D à F, & que A étant plus grande

grande que G, sa raison d'avec Y est aussi plus grande que celle de G d'avec ce même, Y ou par égalité que celle de D d'avec F, & qu'à plus forte raison, C étant plus petite que Y, la raison de A à C est encore plus grande que celle de D à F; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XX.

THEOREME.

SI on propose les Quantités A, B, C, D, E, F, de manière que la première A ait plus grande raison à la seconde B, que la cinquième E à la sixième F, & que la seconde B ait plus grande raison à la troisième C, que la quatrième D à la cinquième E; je dis que celle de la première A à la troisième C est aussi plus grande que celle de la quatrième D à la sixième F.

A. B. C - D. E. F Car en considerant
 8. 4. 2 - 8. 6. 4 la Proportion d'éga-
 A. C - D. F lité mal rangée, on
 8. 2 - 8. 4 connoitra aisément
 que la démonstration de ce Theoreme est la
 même que celle du précédent, & qu'ainsi
 A a plus grande raison à C que D à F;



PROPOSITION XXI.

THEOREME.

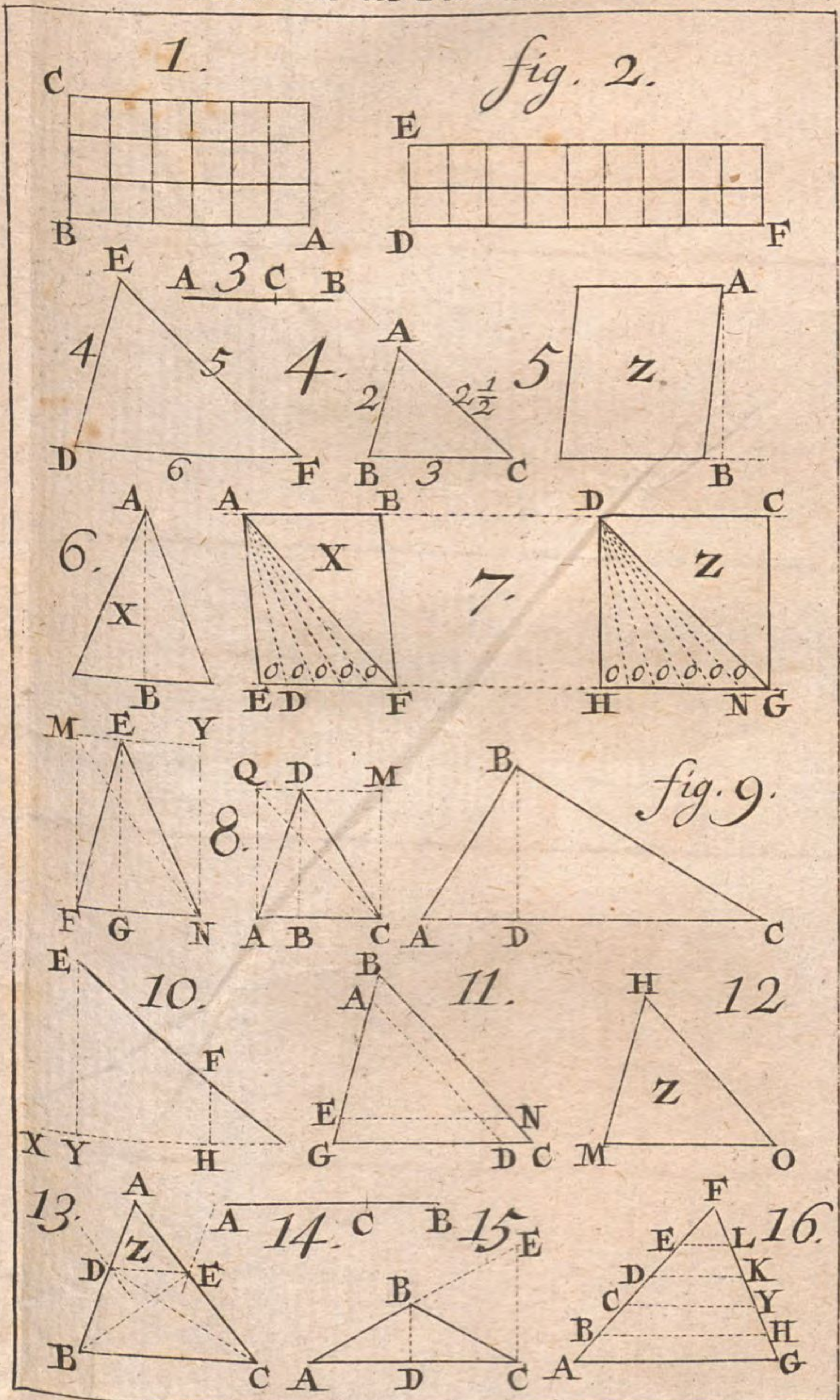
SI le Tout A a plus grande raison au Tout B, que la partie G à la partie F, je dis que le Reste H, a plus grande raison au Reste R, que le Tout A au Tout B, ou que le Tout A a moindre raison au Tout B, que le Reste H au Reste R.

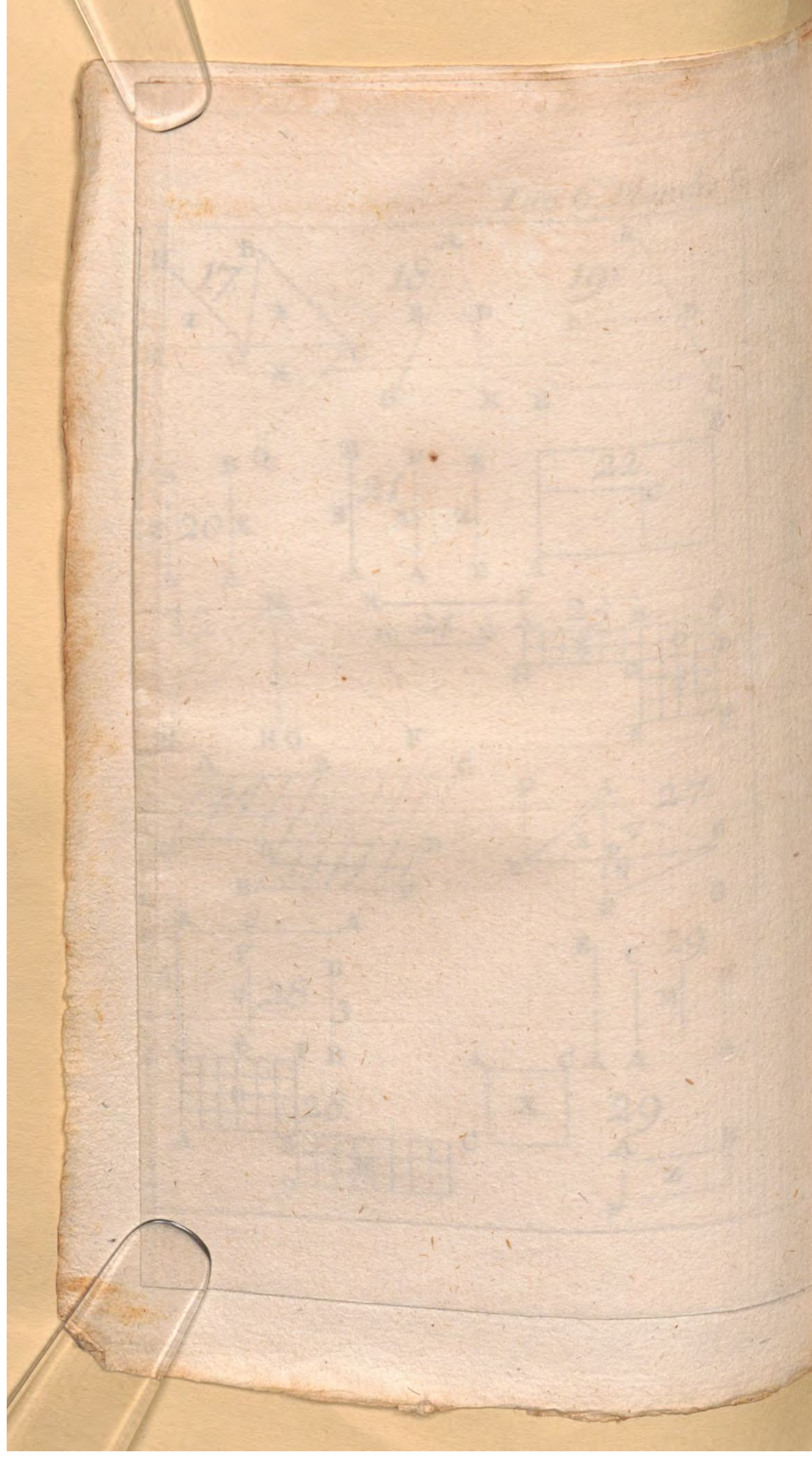
DEMONSTRATION.

A. B. G. F	Car le Tout A ayant, par
9. 6. 4. 3	Supp., plus grande raison au
A. G. B. F	Tout B que la partie G à la
9. 4. 6. 3	partie F, on conclut éviden-
A. H. B. R	ment par la Raison Alterne
9. 5. 6. 3	que ce Tout A a plus gran-
A. B. H. R	de raison à sa partie G, que
9. 6. 5. 3	le Tout B à sa partie F, &

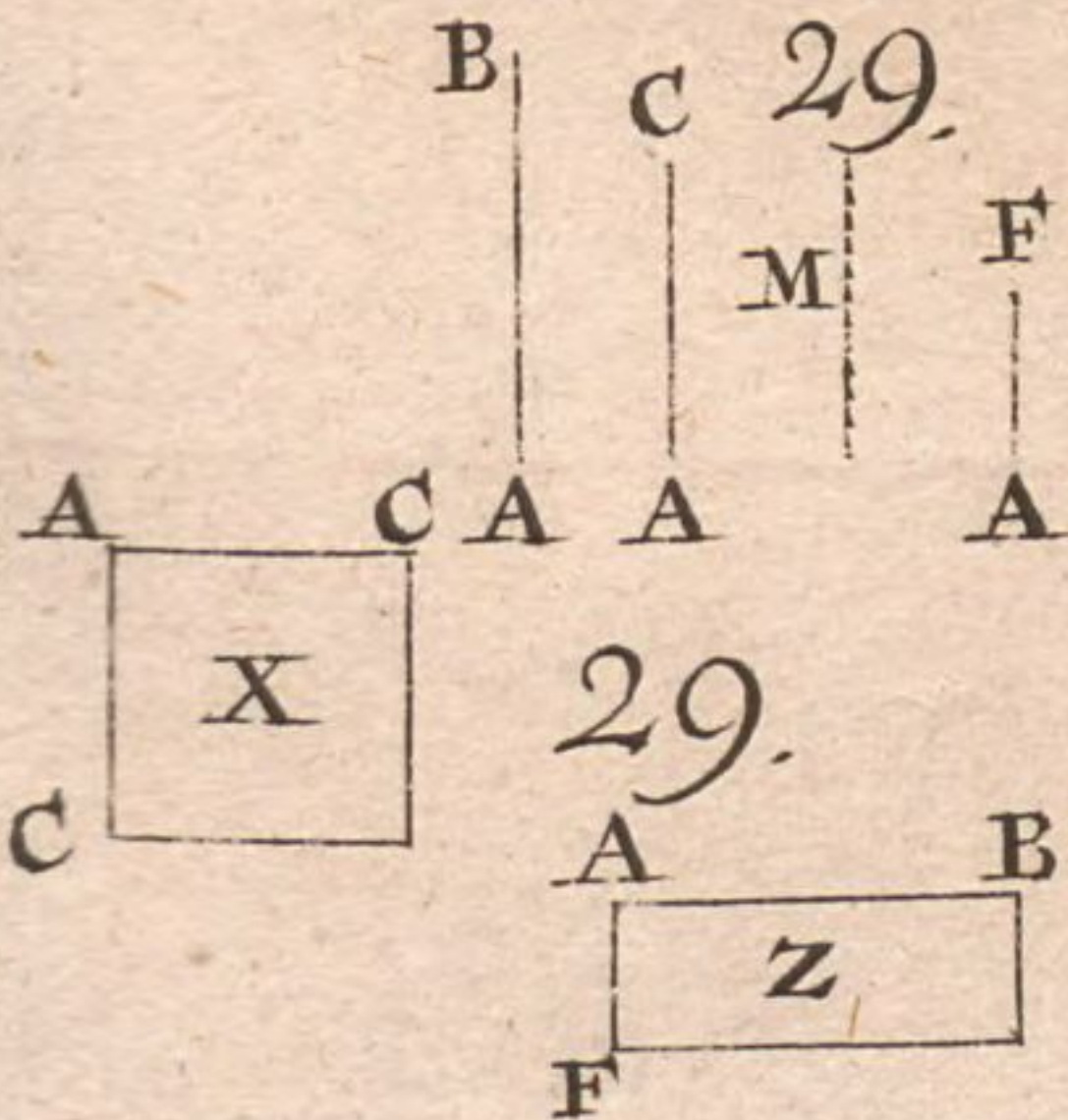
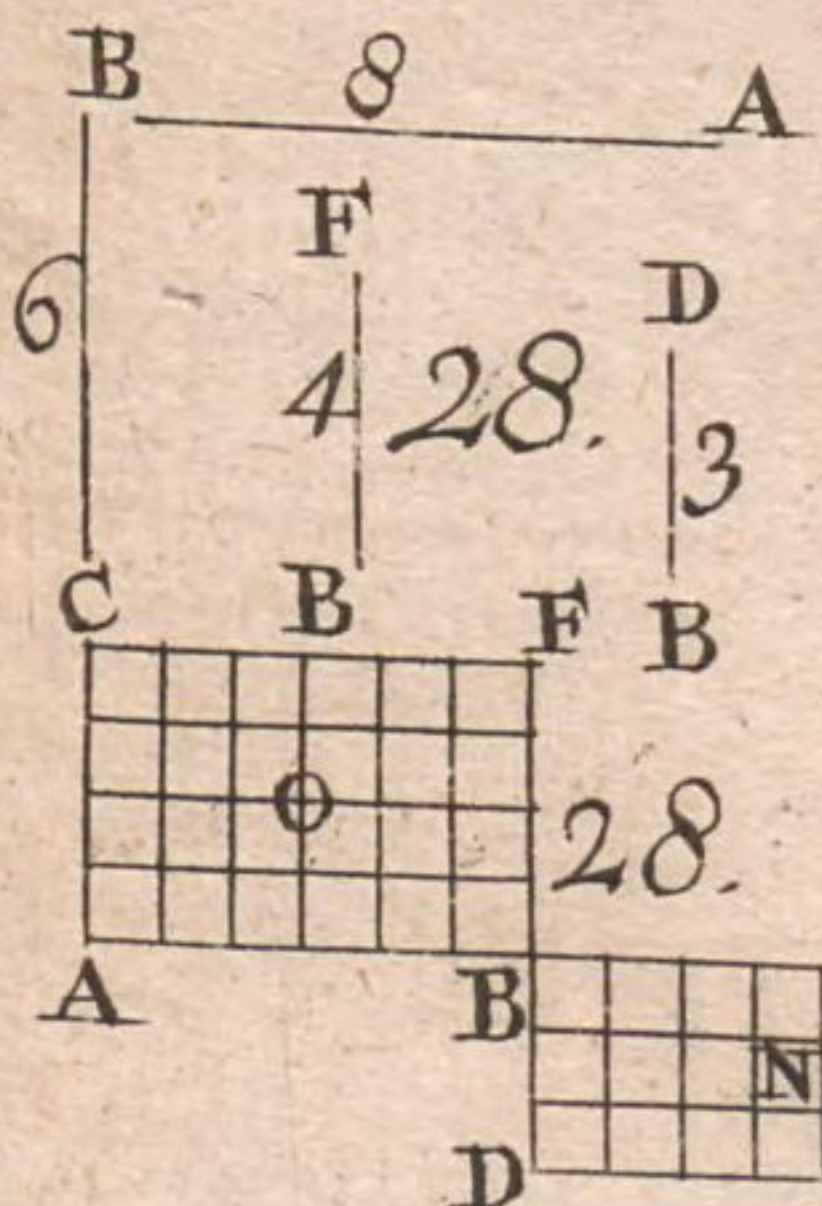
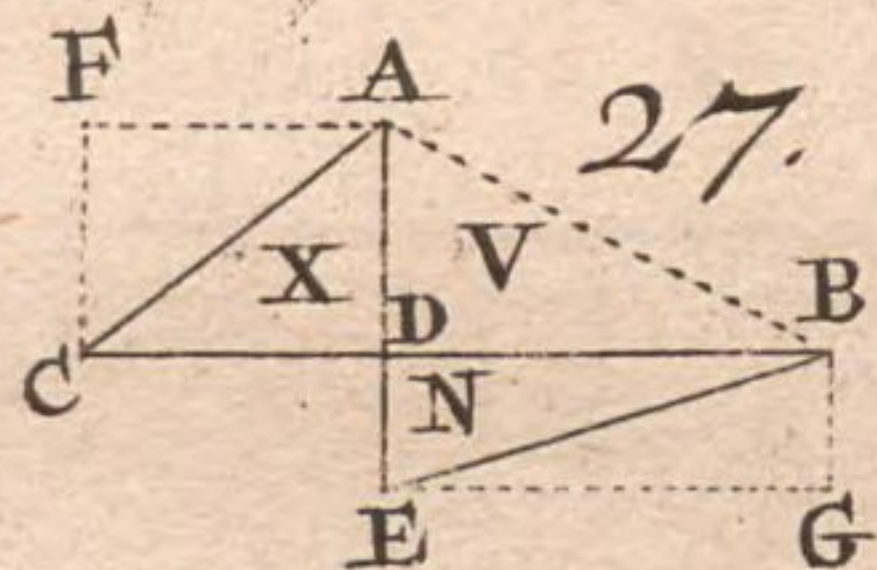
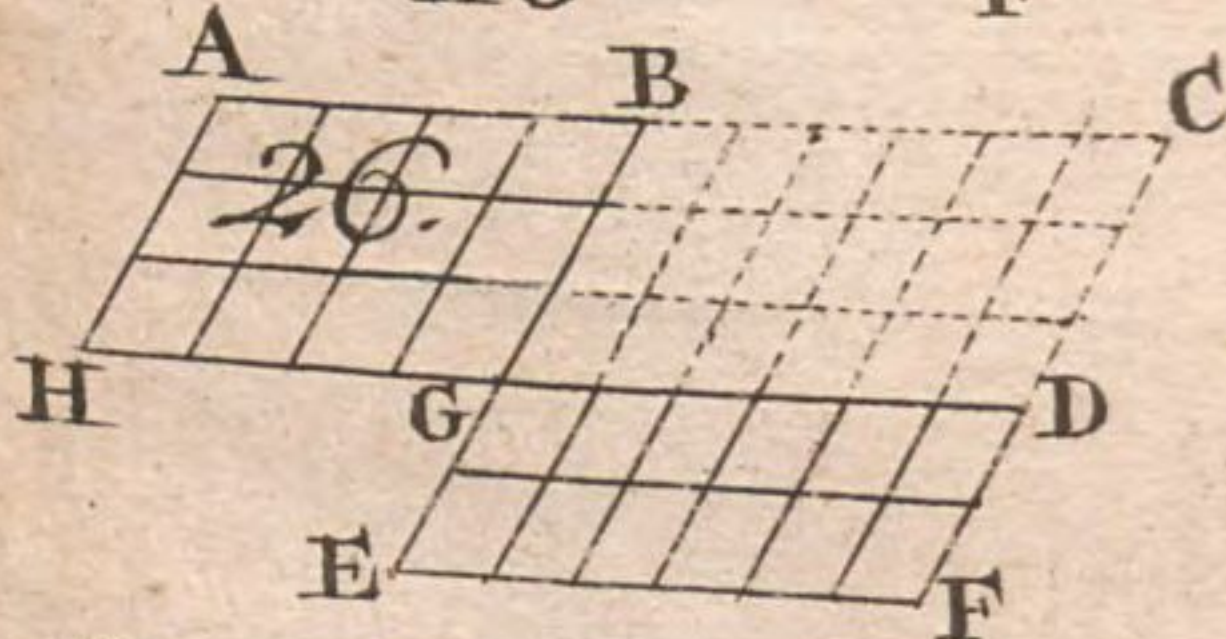
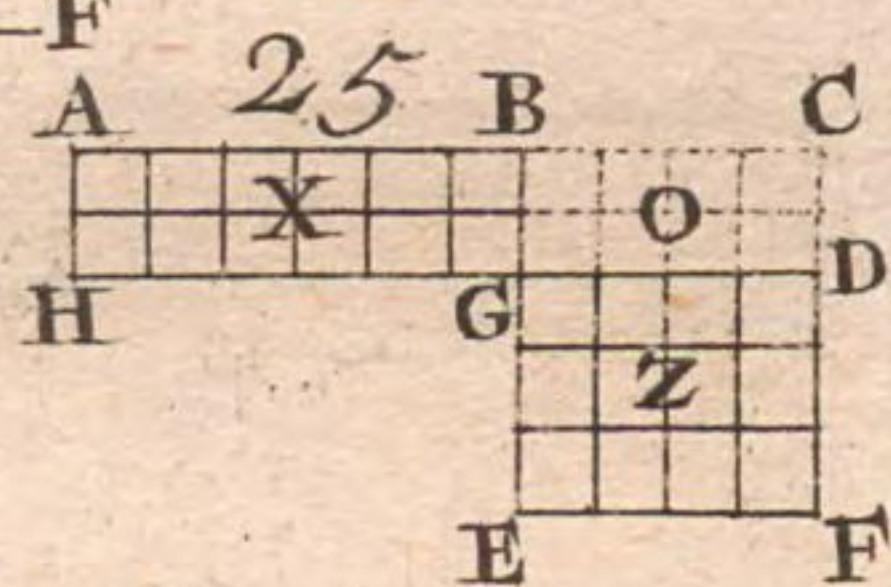
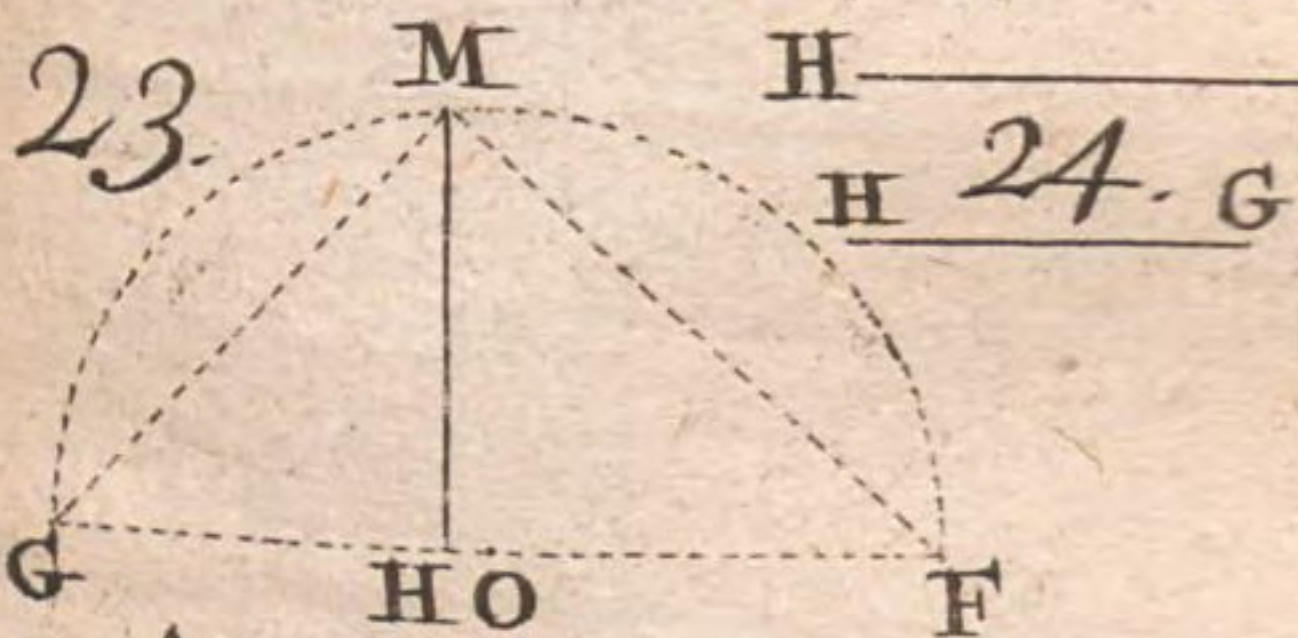
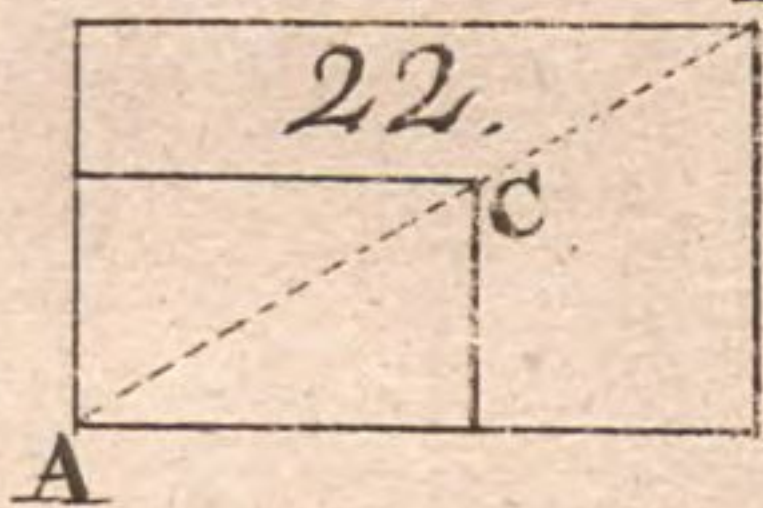
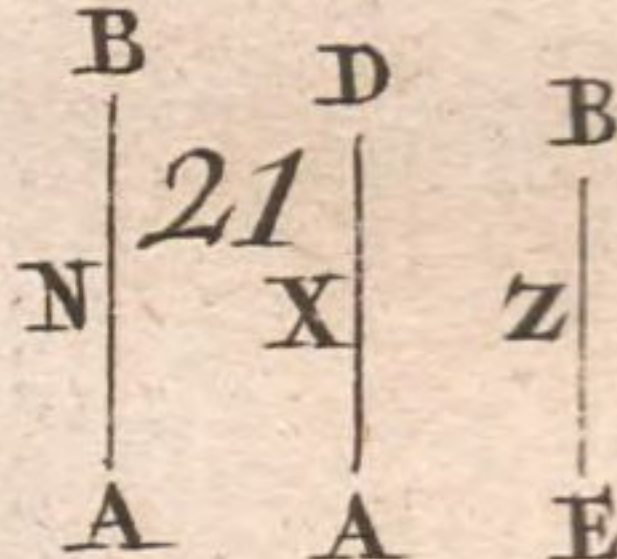
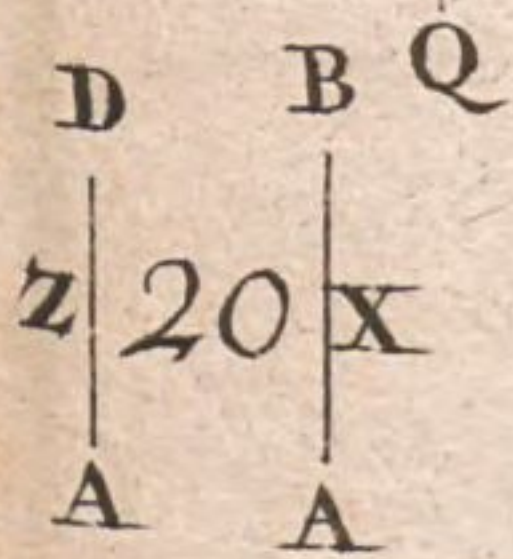
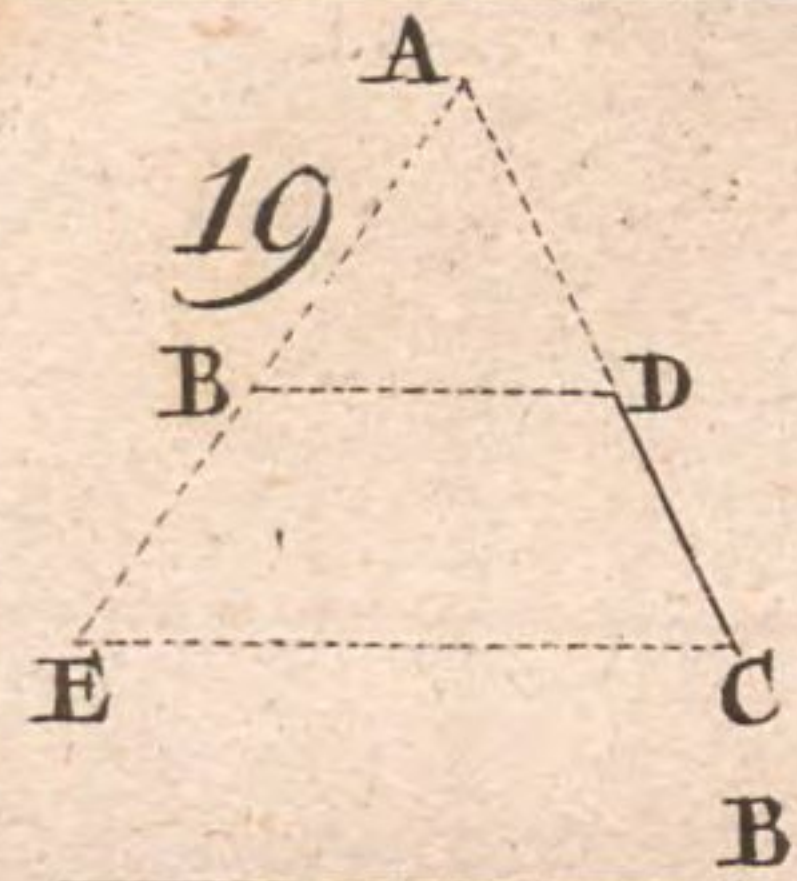
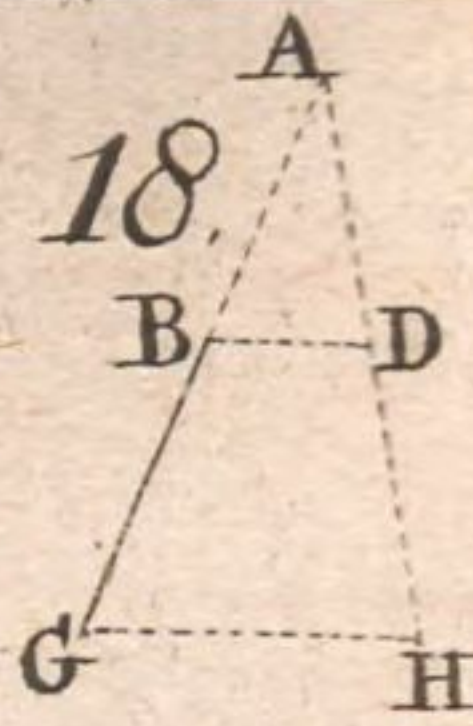
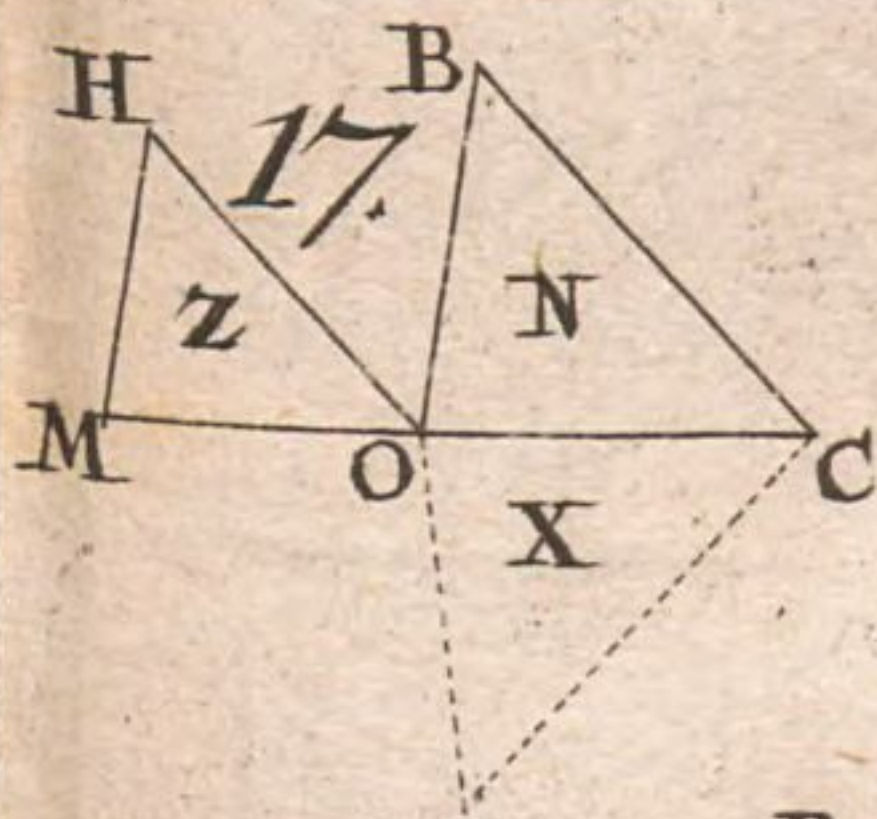
qu'en compensation ce Tout A a moindre raison à son Reste H, que le Tout B à son Reste R, & par la raison Alterne que le Tout A a moindre raison au Tout B, que le Reste H au Reste R; ce qu'il falloit démon-

Fin du Livre cinquième.

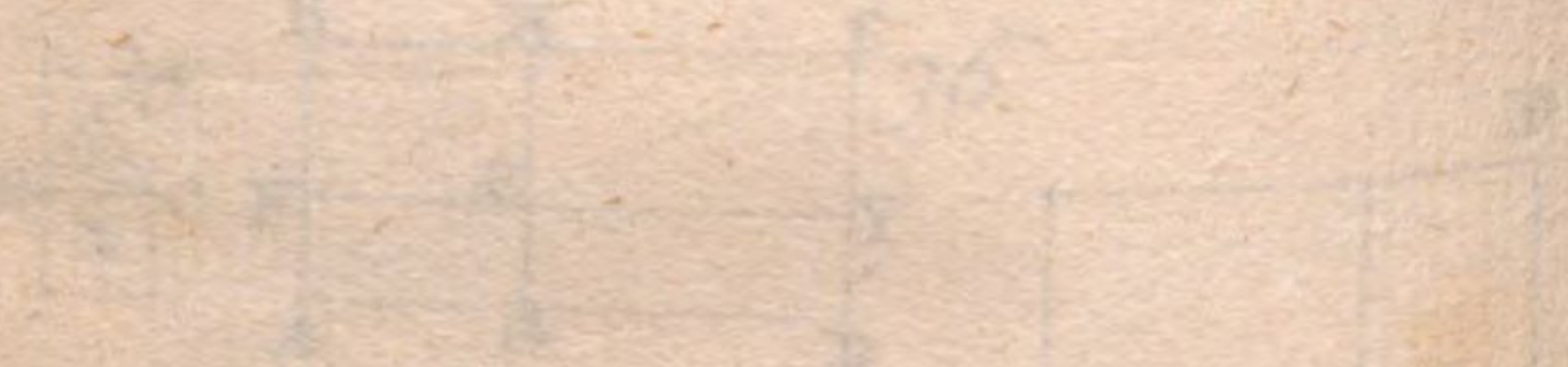
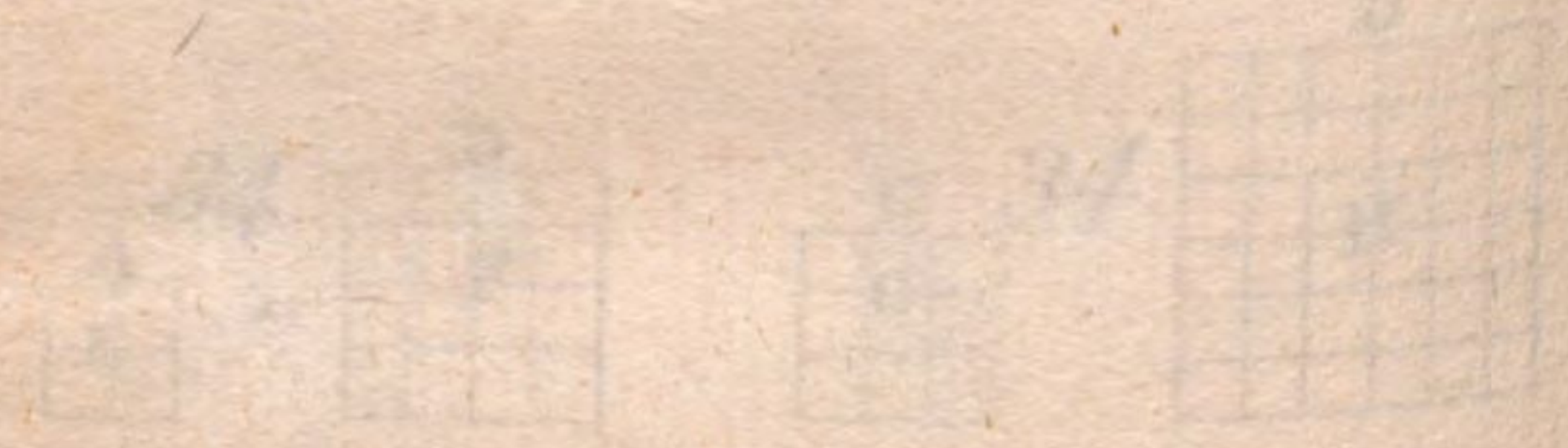
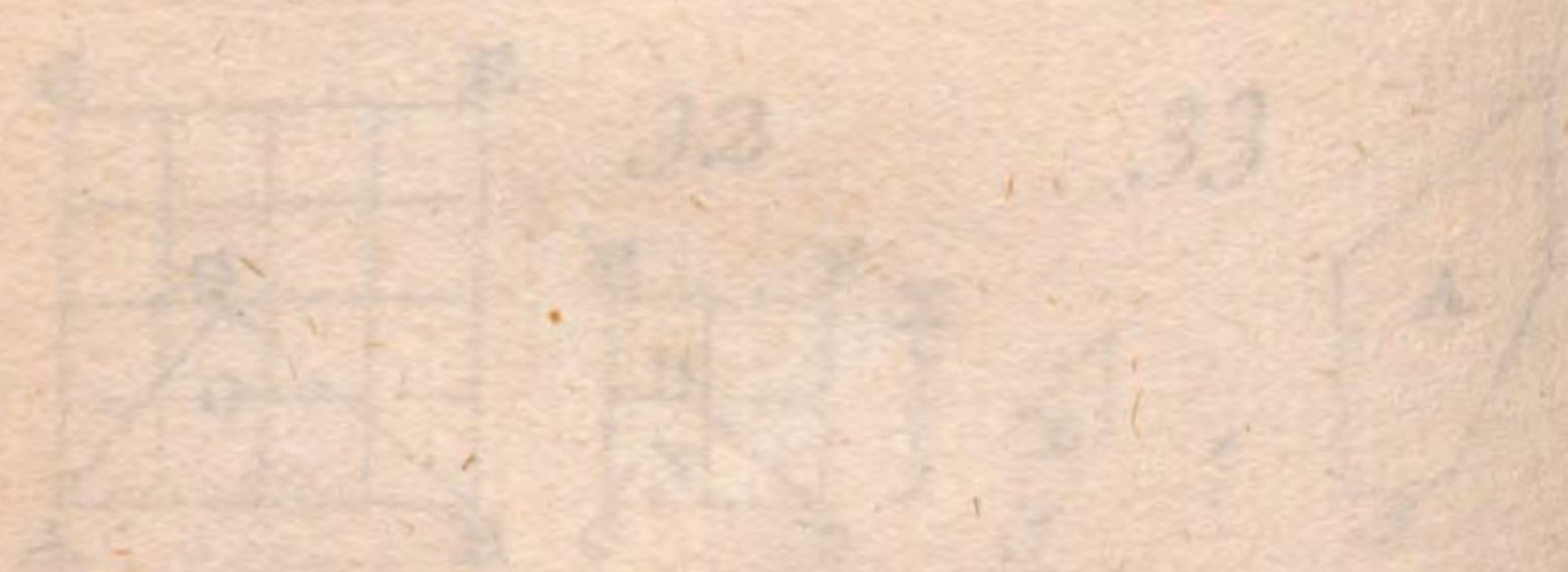


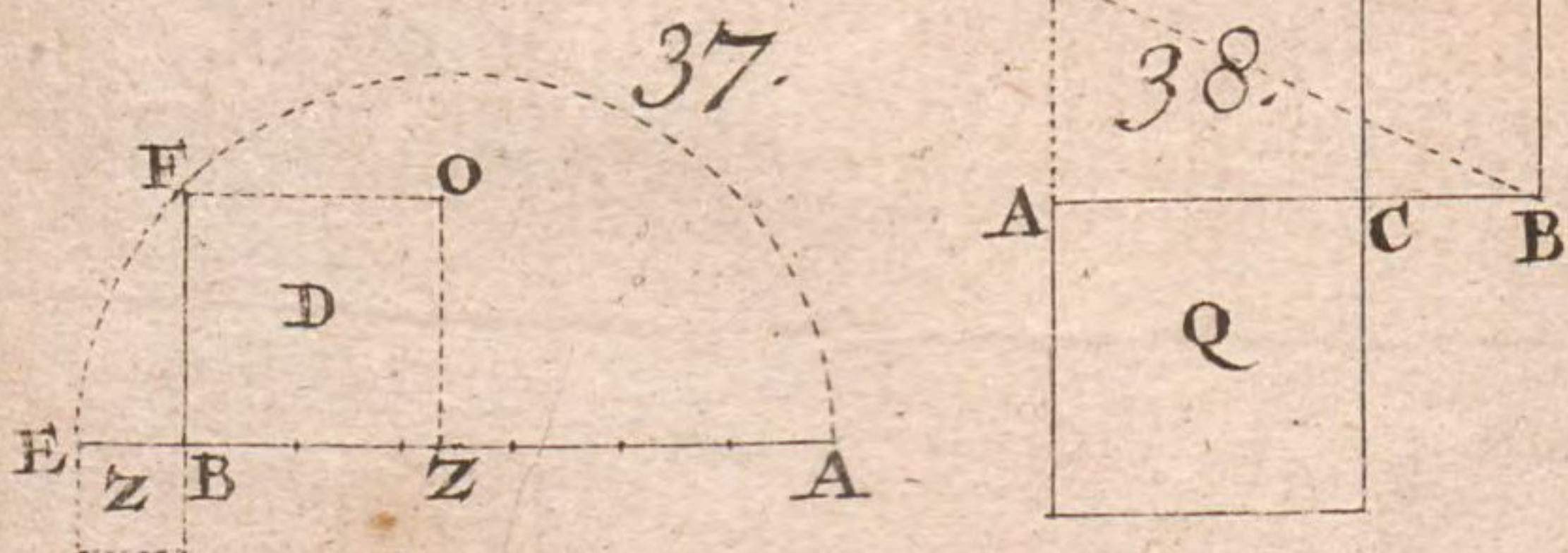
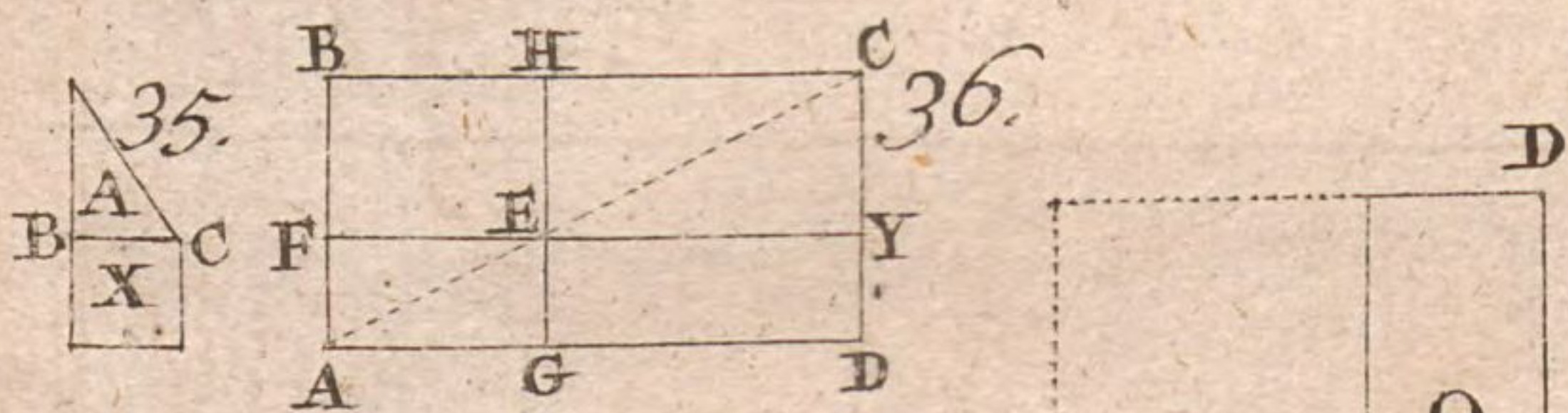
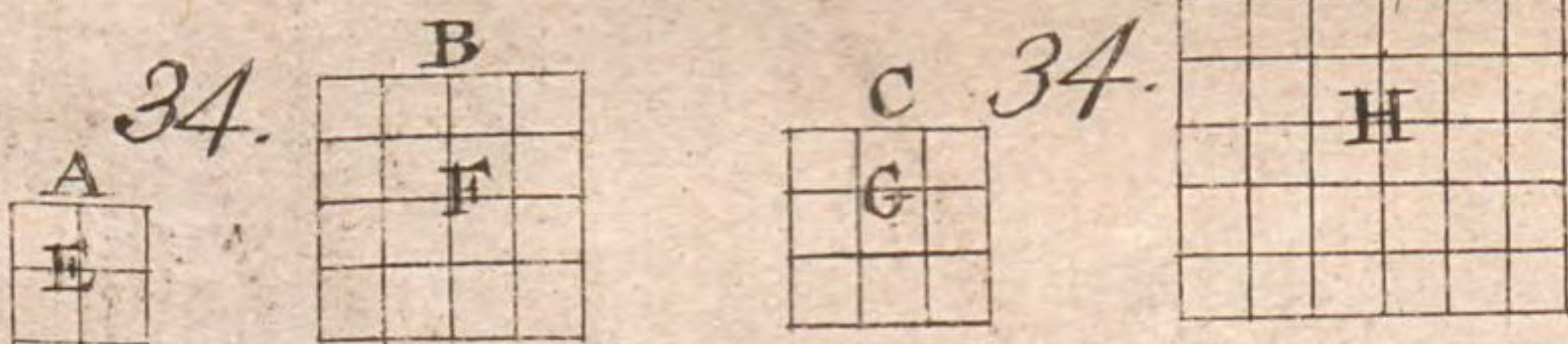
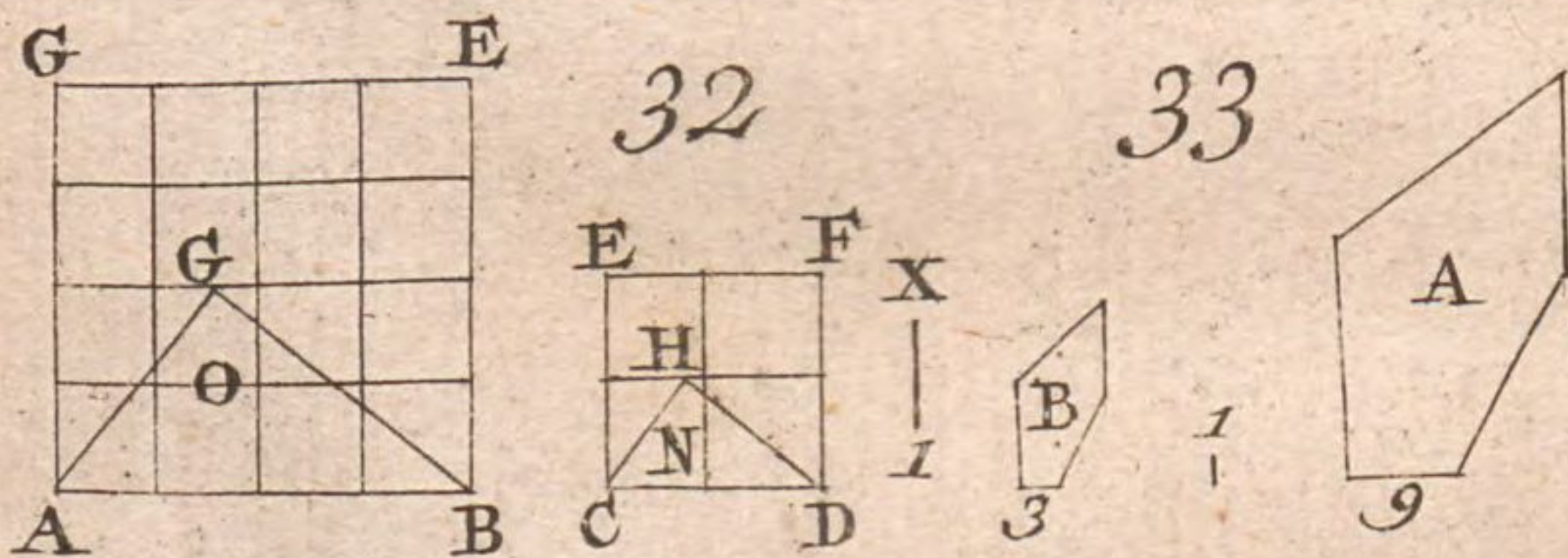
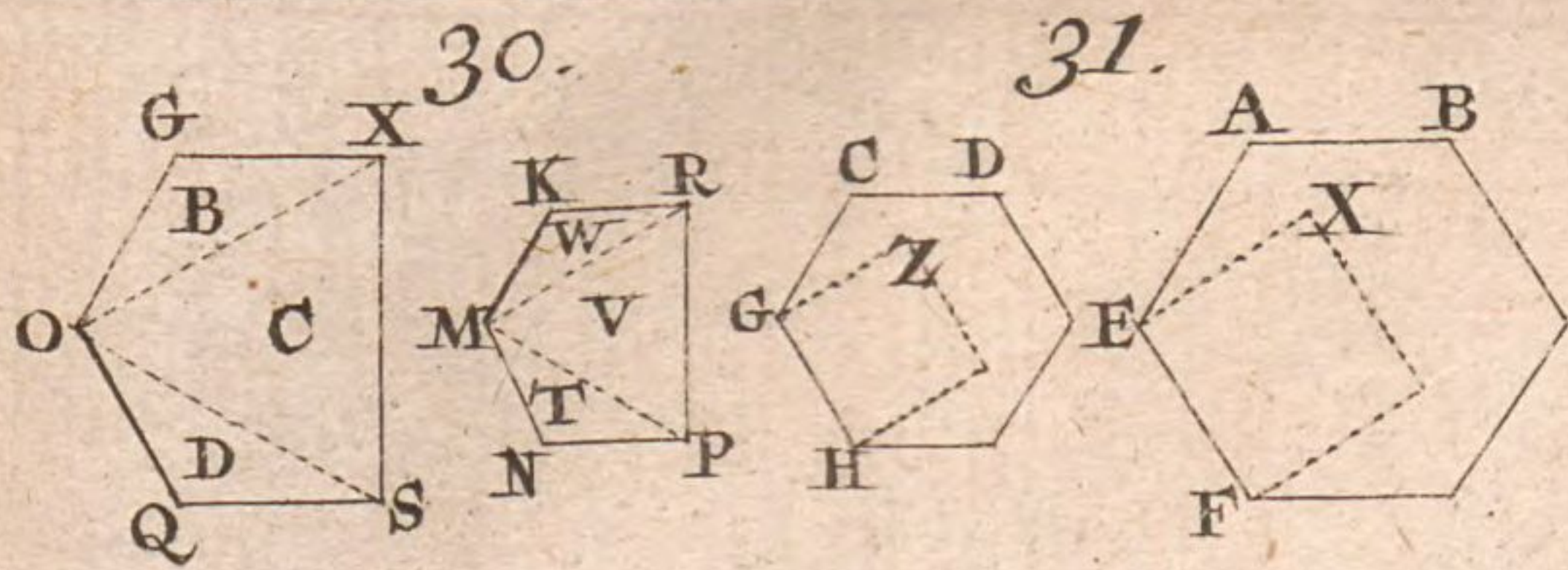


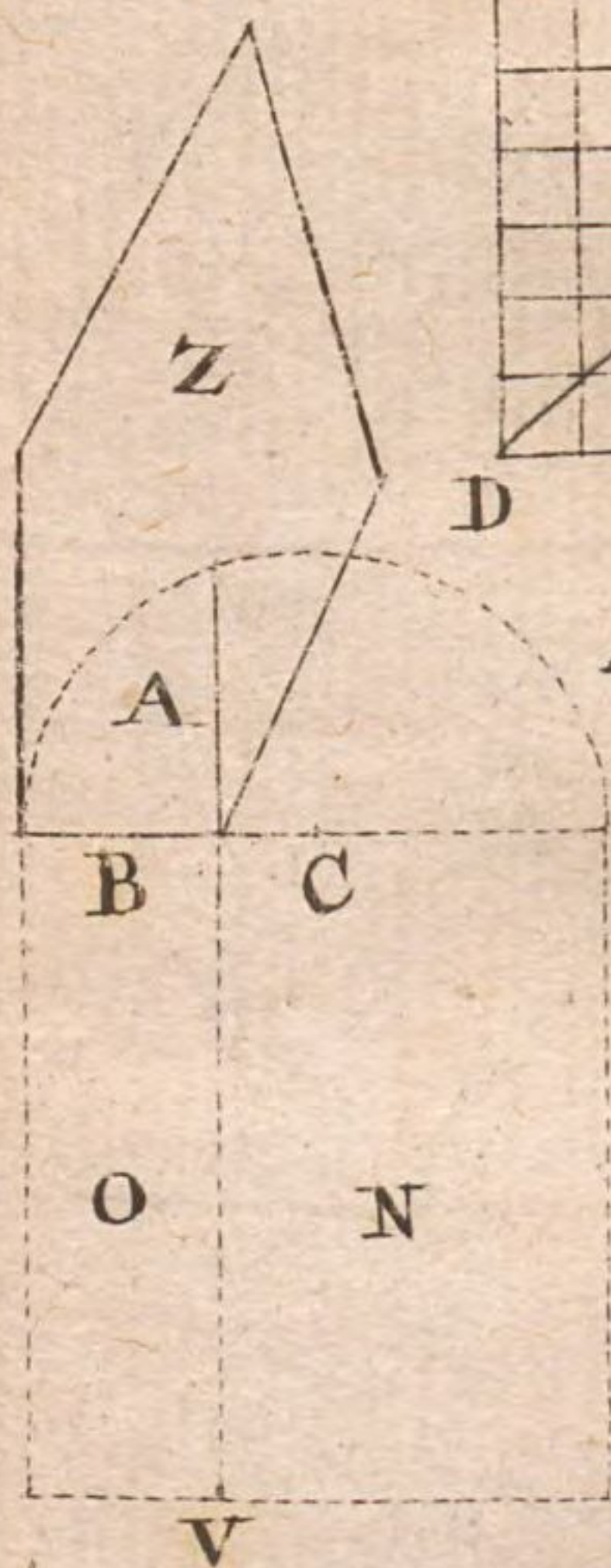
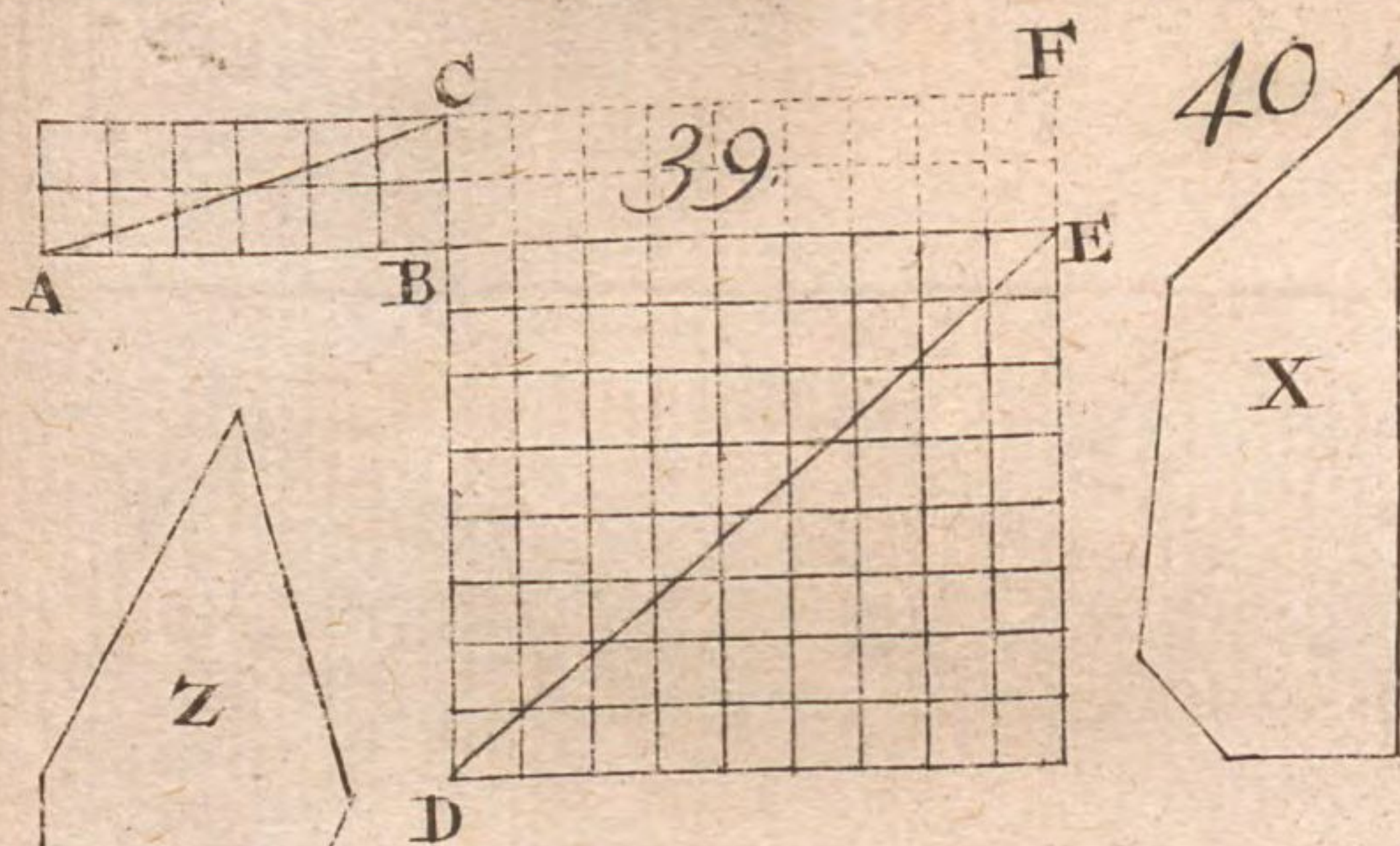
Liv. 6. Planche 2.



11-3 March

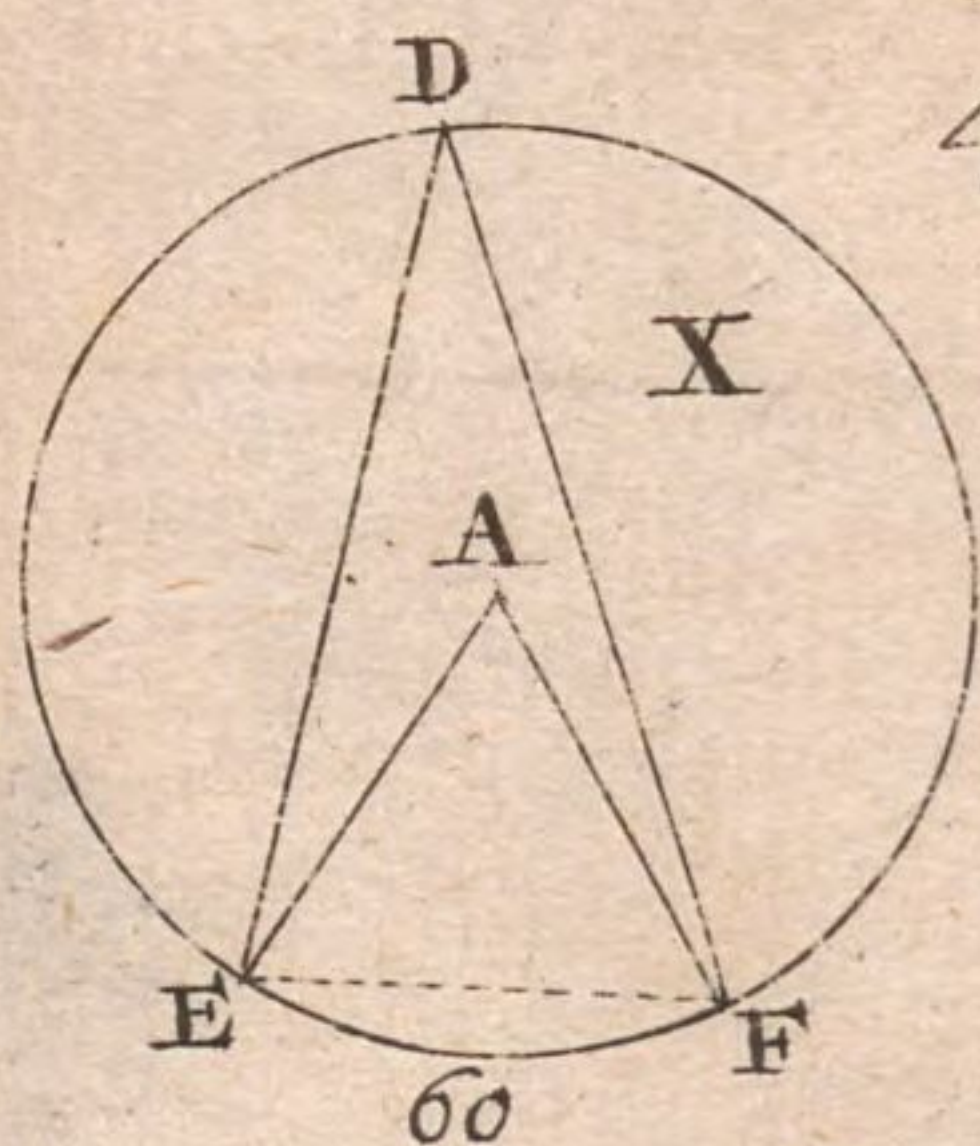
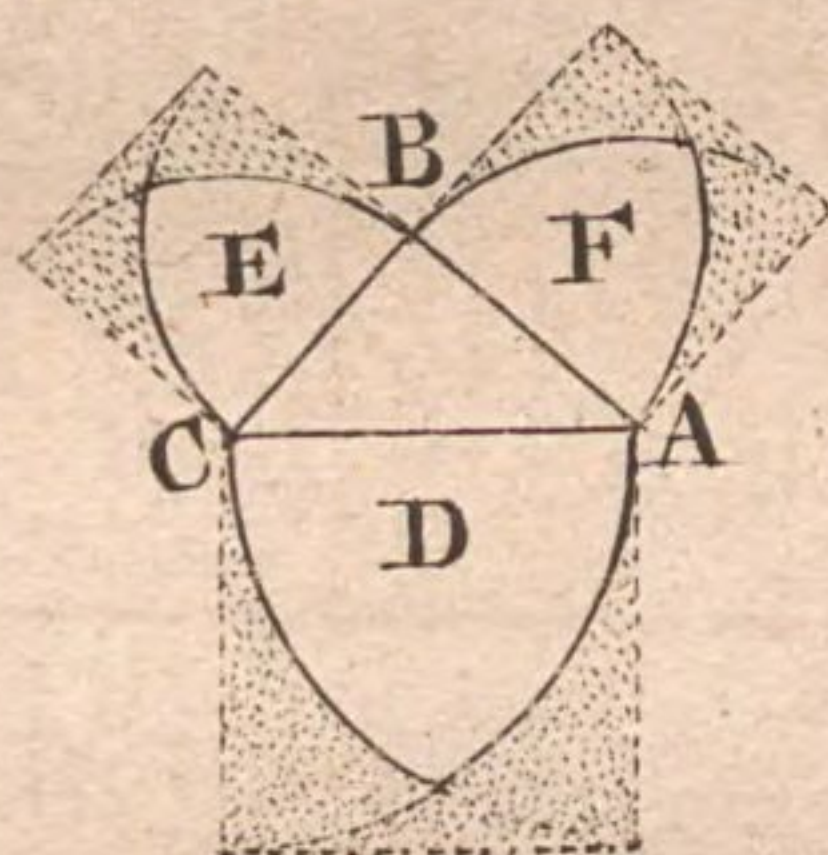




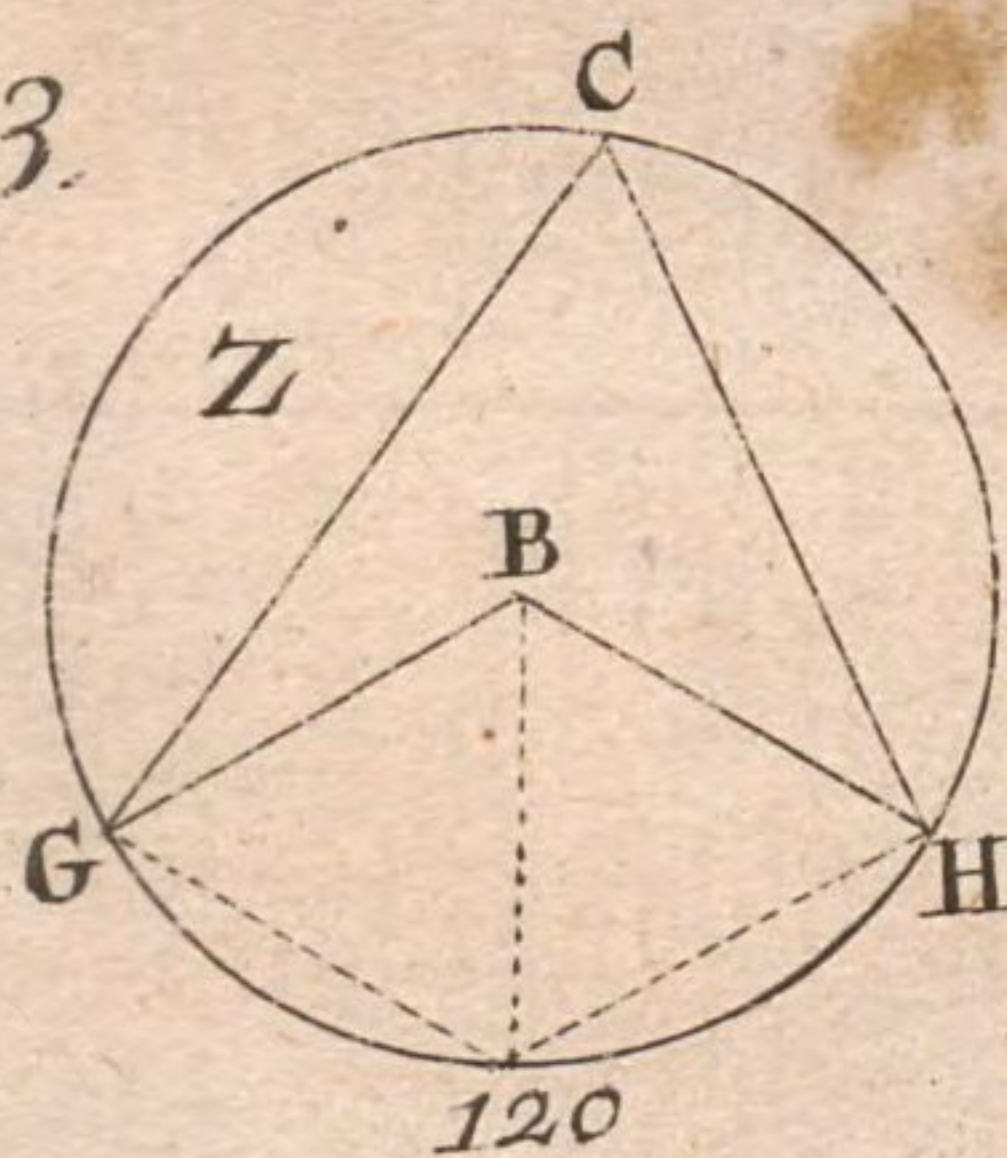


41

42



43.



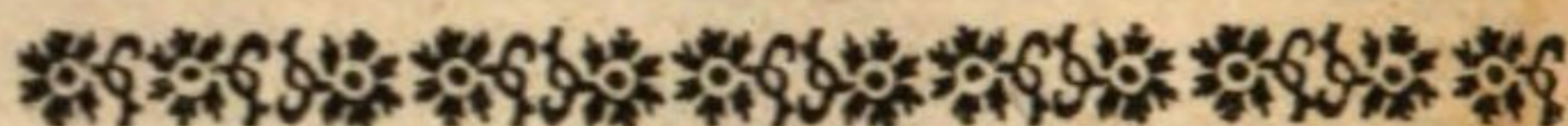


ELEMENTS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE SIXIEME

EUCLIDE nous ayant expliqué en général dans le Livre précédent les Proportions, il commence dans celui-ci, à les appliquer dans les Figures Planes, premièrement dans les Triangles, faisant comparaison de leurs Aires entr'elles, comme aussi de leurs côtés & de leurs Angles; il nous enseigne ensuite à trouver par leurs moyens les Li-
M 3 gnes

gnes Proportionnelles & même une Moïenne entre deux données, & de plus à diminuer ou augmenter une Figure donnée selon une raison donnée &c.



DEFINITIONS

I.

*Plan-
che I
4. fig.*

On dit que deux Figures sont Semblables & Equiangles comme ABC, DEF, lorsqu'outre que chaque Angle de l'une est égal à chaque Angle de l'autre, les côtez, opposez aux Angles égaux, sont proportionnels; de sorte que si l'Angle E est égal à l'Angle A, & l'Angle D à l'Angle B, & l'Angle F à l'Angle C, & la raison du côté ED au côté EF égale à celle du côté AB au côté AC, & celle du côté DE au côté DF égale à celle du côté BA au côté BC, & celle du côté FD au côté FE égale à celle du côté CB au côté CA; ces deux Figures ABC, DEF seront Semblables & Equiangles &c.

II.

*1 & 2
fig.*

On dit que deux Figures sont Reciproques lorsque faisant comparaison de leurs côtez, l'Antecedent d'une raison & le consequent de l'autre, sont les côtez de la même figure, en sorte que pour que les deux
Rectan-

GEOMETRIE. LIV. VI. 183

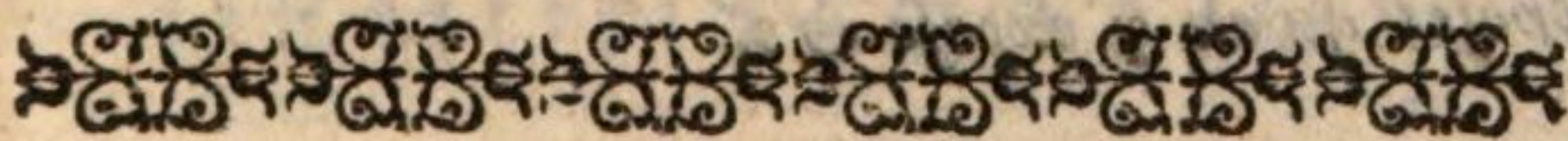
Rectangles ABC, DEF, soient dits Reciproques, il faut que la raison du côté BA au côté DF, soit égale à celle du côté DE au côté BC &c.

III.

On dit qu'une Ligne, comme AB, est ³ fig. coupée selon l'Extreme & Moïenne Raison, lorsque la Toute AB est à sa plus grande partie ou Mediane AC, comme cette Mediane AC à la plus petite CB.

IV.

La Hauteur de deux Figures, comme ^{5 & 6} par exemple des deux X, Z, sont les Perpendiculaires AB, AB abaissées des Points A, A les plus éloignez des bāses de ces Figures, ou des prolongemens de ces bāses.



PRINCIPES.

Premier Principe.

SI à Quantités Semblables on en ajoute de Semblables de même espece, les Tōtales seront Semblables, & en même raison que les Premiēres; d'où il suit.

Deuzième Principe.

Que si de Quantités Semblables on en ôte de Semblables, celles qui restent seront Semblables, & en même raisons que les Tôtals.

Le premier de ces deux Principes, suppose que les Quantités qu'on ajoute aux données, le soient de la même façon, & qu'elles en soient mêmes parties.

Et le second que celles que l'on en ôte, le soient de la même manière, & qu'elles en soient mêmes parties.

Il est bon d'avertir le Lecteur, que si il trouve de la difficulté dans ces deux Principes, de ne pas s'y arreter; il en appercevra facilement la Verité, lorsqu'il aura vu les endroits ou je m'en serve pour démontrer la Verité des choses qu'on y expose &c.





PROPOSITION I.

THEOREME.

SI les Triangles AEF, GDH, ou Paral- 7 *fig.*
lelogrammes ABEF, GCDH sont en-
tre les mêmes Paralleles AC, EG, je dis
qu'ils sont en même raison que leurs bâ-
ses.

De sorte que si par exemple la Lâse du
premier est égale aux cinq fixièmes de la bâ-
se du second, le premier sera aussi égal aux
cinq fixièmes du second.

DEMONSTRATION.

Car en tirant des Points A, D les Droites
ponctuées aux Points de divisions des bâses
EF, GH, que je suppose l'une de 5 pieds &
l'autre de 6, on connoîtra aisément par le
Cor. 1. de la Prop. 28, 1. que tous les petits
Triangles O sont égaux entr'eux, car outre
l'égalité de leurs bâses ils sont par l'Hypothese
renfermez entre les mêmes Paralleles, de sor-
te que le Triangle EAF, étant composé de
cinq petits, il fait les cinq fixièmes du Trian-
gle GDH, puisque celui-ci l'est de six; par
consequent le Triangle EAF est au Trian-
gle GDH comme 5 à 6, c'est-à-dire com-
me 5 me

me sa b  se EF, à la b  se GH ou par égalité, le Parallelogramme ABEF est au Parallelogramme GCDH, comme la b  se EF à la b  se GH, parce que ces Parallelogrammes sont doubles de ces Triangles EAF, GDN par 25, 1.; ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

3 fig.

D'où il suit que les Triangles FEN, ADC dont les b  ses FN, AC sont égales, sont entr'eux comme leur hauteur EG, DB.

Car si par les Points E, D, on tire les Droites MEY, QDM Parallelement aux b  ses FN, AC, & des Points F, A les Droites FM, AQ Perpendiculairement à ces b  ses, & les Droites MN, QC, on connoîtra aisément par la Définition des Paralleles que les Droites FM, GE. AQ, BD sont égales, & par 28, 1. que les Triangles FMN, FEN sont égaux, comme aussi les Triangles AQC, ADC & par la précéd. que le Triangle FMN est au Triangle AQC, comme la b  se FM à la b  se AQ, à cause que l'on peut prendre les égales FN, AC pour hauteurs: & par égalité que le Triangle FEN est au Triangle ADC, comme sa Hauteur EG à la Hauteur BD; ce qu'il falloit démontrer.

même
fig.

On entendra la même chose des Parallelogrammes FMYN, AQCM, puisque par 25, 1. ils sont doubles des Triangles FMN, AQC ou FEN, ADC.

PRO-

PROPOSITION II.

THEOREME.

SI la Droite DE , qui coupe les côtés du Triangle ABC , est Parallele à la base BC , ces côtés AB , AC seront coupez Proportionnellement. 13 fig.

DEMONSTRATION.

Parce qu'en tirant les Droites EB , DC , on a les deux Triangles DEB , EDC qui par 28-1. sont égaux (à cause de la base commune DE & des Paralleles BC , DE) & qui par 7, 5 ont même raison au Triangle Z qui par 1. est au Triangle DBE comme la base AD à la base DB ; d'autant que l'on peut concevoir une Ligne Droite tirée par le Point E Parallelement à ADB ; on conclut évidemment par les mêmes raisons que ce même Triangle Z est au Triangle EDC comme la base AE à la base EC & par égalité que AD est à DB , comme AE à EC ; ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

*même
fig.*

D'où il suit que si les côtés AB, AC du Triangle ABC sont coupez Proportionnellement par une Ligne Droite comme DE, cette Ligne Droite DE fera Parallele à la bête BC.

Car on connoît aisément par la précédente que le Triangle Z a même raison au Triangle EDC qu'au Triangle EDB & par le Coroll. de la Prop. 7. du Liv. 5. que ces derniers Triangles sont égaux, & par le Coroll. 3. de la Prop. 28, 1. que les Lignes DE, BC sont Paralleles, à cause de la bête commune DE à ces deux Triangles; ce qu'il falloit démontrer.



P R O P O S I T I O N I I I.

T H E O R E M E

15 fig. SI la Ligne Droite BD divise en deux également l'Angle ABC du Triangle CAB, je dis que les Segmens AD, DC de la bête AC, sont en même raison que les côtez AB, BC,

De sorte que AD est à DC, comme AB à BC.

D E

DEMONSTRATION.

Car si on prolonge AB, & tire du Point C la Droite CE, Parallelement à DB, qui coupe en E le Prolongement BE, on connoitra aisément par 21, 1. & par l'Hypoth. que les Angles ABD, DBC, AEC, BCE sont égaux entr'eux, à cause des Paralleles DB, CE, & par 5, 1 que le Triangle BEC est Ifofcele, & par le Coroll. 1. de la même, que la Droite BE est égale à BC, & par la Précédente, que la raison du Segment AD au Segment DC, est égale à celle du Coté AB au prolongement BE ou par égalité, au côté BC; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il suit que l'Angle ABC, du Triangle ACB, est divisé en deux également, si les Segmens AD, DC du côté AC, opposé à cet Angle, sont entr'eux comme les deux autres côtez. *même fig.*

Car si on prolonge AB de manière que son prolongement BE soit égal au côté BC, & si l'on joint la Droite CE, on connoitra aisément par le Coroll, 1 de la Prop. 5. du Liv. 1, que le Triangle BCE est Ifofcele, & par égalité que le côté AB est au côté BE, comme AD à DC, & par le Coroll. de la Prop. 2 que les Lignes DB, CE sont Parallèles, & par 21, 1 que les Angles ABD,

ABD, AEC ou par égalité BCE ou DBC sont égaux, & qu'enfin, l'Angle ABD étant égal à l'Angle DBC, le Tôtal ABC est divisé en deux également; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

T H E O R E M E

11 *or* **S**I les Triangles Z, GCB sont Equiang-
12 *fig.* gles, je dis qu'ils ont les côtez oppo-
sez, aux Angles égaux, Proportionnels.

En sorte que si l'Angle M est égal à l'Angle G, & l'Angle O à l'Angle C & par conséquent l'Angle H, à l'Angle B, le côté MH sera au côté GB, comme le côté MO au côté GC, & le côté HM sera au côté BG, comme HO à BC & enfin le côté OH sera au côté CB, comme le côté OM au côté CG.

DEMONSTRATION

Car si par la pensée on pose ce Triangle Z sur le Triangle GBC, de maniere que son Angle M tombe sur l'Angle G, il est évident qu'il occupera la place GAD, & que le Triangle GAD sera égal en tout sens au Triangle MHO & qu'enfin, l'Angle

gle H ou l'Angle DAG, étant égal, par Supp., à l'Angle B, la Droite AD sera Parallele à BC par 19, 1.; & que par 2 GA ou MH sera à AB, comme GD ou MO à DC, & qu'en composant MH sera à GB, comme MO à GC; ce qui suffit.

Car en posant de la même façon le Triangle Z sur le Triangle BGC, c'est-à-dire de manière que son Angle H tombe sur son égal B, on connoîtra par un raisonnement semblable au précédent que le Triangle NBE, est le même que le Triangle Z, & qu'enfin la raison de HM à BG est égale à celle de HO à BC &c.

Le reste est trop évident pour en parler d'avantage.

COROLLAIRES.

I.

D'où il suit que si on mène une Droite, comme DA, Parallelement au côté BC les Triangles GAD, GBC seront Equiangles & par consequent Semblables par la précédente. II fig.

II.

Il suit encore de ce Theoreme que, si le Triangle Z à un Angle comme M égal à l'Angle G du Triangle GBC, & les côtez MH, MO en même raison que les côtez GB, GC; ces deux Triangles seront Equiangles. même fig.

Car

12. *fig.* Car en concevant le Triangle Z sur le Triangle GBC, de manière que son Angle M, tombe sur son égal G, il est évident que le Triangle GAD sera le même que le Triangle Z, & que, par le Coroll. de la Prop. 2, la Ligne AD sera Parallele à BC, & que, par le Coroll. précéd., le Triangle GAD, ou par égalité le Triangle Z, sera Equiangle au Triangle GBC; ce qu'il falloit démontrer.

I I I.

Plan- Et que si les Triangles Z, OCB, ont
che 2. les côtés Proportionnels, ils seront Equian-
17. *fig.* gles, en sorte que si la raison du côté MH
au côté MO, est égale à celle du côté OB
au côté OC, & celle du côté OH au côté
OM, égale à celle du côté CB au côté
CO, ces deux Triangles seront Sembla-
bles.

Car en supposant qu'on ait décrit sur OC
le Triangle X Equiangle au Triangle Z,
on connoitra par 4. que la raison du côté
MH au côté MO, est égale à celle du côté
OC au côté OQ, & par égalité que cel-
le de OQ à OC, est égale à celle de OB
à ce même OC, à cause que celle de MH,
à MO l'est par supp. à celle de OB à
OC; par conséquent les côtez OB, OQ
ayant une même raison à OC, ils seront
égaux par le Coroll. de la Prop. 7, du Liv.
5, comme aussi les côtez QC, CB par les
mêmes raisons, & les Triangles X, N se-
ront égaux en tous sens, par 8, 1, & par
conséquent Equiangles, aussi bien, par éga-
lité

lité, que les Triangles Z , N , qui par 4 sont
Semblables; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION V.

THEOREME.

SI du sommet B du Triangle Rectangle *plan-*
 ABC , on abaisse la Perpendiculaire BD , *che 1*
je dis que les trois Triangles ABC , ABD , *9 fig.*
 BDC , qui en resultent, sont Semblables
entr'eux.

DEMONSTRATION.

Car outre l'Angle Droit ADB , du Trian-
gle Rectangle ABD , égal au Droit ABC ,
du Rectangle ACB , l'Angle A est commun
à ces deux Triangles qui par le Coroll.
5. de la Prop. 16. du Liv. 1, sont Equian-
gles & par consequent Semblables par 4;

Parce que l'Angle Droit BDC , du Trian-
Rectangle DCB , est égal au Droit ABC , du
Rectangle ACB , & que l'Angle C est com-
mun à ces deux Triangles, il s'ensuit par
le Coroll, 5 de la Prop. 16. du Liv. 1, qu'ils
sont Equiangles, & par 4 qu'ils sont Sem-
blables, & par l'Axiome 3. du Liv. 1., que
les trois Triangles ABC , ABD , BDC le
sont entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.

N

CO.

194 E L E M E N S D E
COROLLAIRES.

I.

Il suit de ce Theoreme, que la Perpendiculaire BD est Moïenne Proportionnelle entre les Segmens AD, DC, de la bâte AC. Car les Triangles ABD, BDC étant Semblables par la Précéd., il s'ensuit par 4 que la raison du côté DA, du Triangle ABD, au côté DB, du Triangle BDC, est égale à celle de ce même côté DB, du Triangle ADB, au coté DC du Triangle BDC; ce qu'il falloit démontrer.

I I.

*même
fig.*

Il s'ensuit encore que AB est Moïenne Proportionnelle entre AC, AD.

Car les deux Triangles ACB, ABD étant Semblables, on connoît par 4, que le côté AC, du Triangle ACB, est au côté AB, du Triangle ABD, comme ce même côté AB, du Triangle ABC, au côté AD, du Triangle ABD; ce qu'il falloit démontrer.

I I I.

J'ajoute que BC est Moïenne Proportionnelle entre CA, CD.

Car les Triangles ACB BDC étant Semblables, on connoît aisément par 4, que la raison du côté CA, du Triangle ACB, au côté CB, du Triangle BDC, est égale à celle

celle de ce même côté CB, du Triangle ACB, au côté CD du Triangle BDC; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VI.

PROBLEME.

Diviser la Ligne EG, en sorte que ses 10 parties soient entr'elles, comme celles 14 *fig.* de la Ligne donnée AB, c'est-à-dire de manière qu'elles soient entr'elles comme BC est à CA.

PREPARATION.

Tirés du Point G la Droite GX à discrétion, rétranchés-en GY égale à AB & GH à BC, joignés la Droite EY, & du Point ou Section H, tirés HF parallèlement à EY.

Je dis que la Ligne GE se trouve divisée comme on avoit proposé de le faire.

DEMONSTRATION.

Car la Droite GY étant, par Constr., égale à AB & GH à BC, HY la sera aussi à CA, & HF étant Parallele à EY, on connoitra aisément par les précédentes, que la raison de GH à HY, ou par égalité, celle

de BC à CA, est égale à celle de GF à FE;
ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

16 fig.

Il est évident que pour diviser une Ligne comme AF, de manière que ses parties soient entr'elles comme celles de la donnée FG, il n'est question que de joindre FA, FG, en sorte qu'elles comprennent un Angle quelconque AFG, & joindre GA & tirer par les Points de division de cette donnée FG, des Lignes ponctuées Parallelement à la Ligne AG; Car il est aisé de conclure par la Précédente que cette Ligne AF, se trouve divisée comme la Ligne FG; aussi est-il aisé de remarquer que la démonstration de cette Proposition, est la même que celle de la précéd.





PROPOSITION VII.

PROBLEME.

Trouver une Troisième Proportionnelle
aux deux Lignes données AD, AB.

PREPARATION.

Joignés ces deux Lignes, en sorte qu'el-*Plan-*
les comprennent une Angle comme BAD, *che 2*
& de l'extrémité B tirés à l'extrémité D, *18* &
la Droite BD; prolongés ces deux Lignes *20 fig.*
AD, AB à discretion, & coupés DH éga-
le à AB, & de la Section H, tirés HG Pa-
rallelement à BD qui terminera BG, que
je dis être la troisiéme Proportionnelle qu'on
cherche.

DEMONSTRATION.

Car AD étant de la même longueur que
la Ligne Z, & AB de la même longueur
que la Ligne X, il s'ensuit par les précéd.
que, GH étant Parallele à DB; AD ou Z
est à DH ou, par égalité, AB ou X, com-
me AB ou cette même X à BG; par con-
séquent, les trois Lignes :: Z. X. BG.

N 3

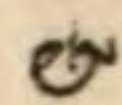
étant

étant continuellement Proportionnelles, on a raison de dire que BG, est la troisième Proportionnelle qu'on cherche; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION VIII.

P R O B L E M E.

19  **T**rouver une Quatrième Proportionnelle aux trois Lignes données AB, AD, EB.

21 *fig.*

P R E P A R A T I O N.

Joignés les Droites AB, AD, de manière qu'elles comprennent un Angle, comme BAD; tirés BD, & après avoir continué AB, de sorte que le prolongement BE soit égale à la Ligne Z, prolongés AD à discrétion, & de l'extrémité E, tirés EC Parallèlement à BD.

Je dis que DC est la Quatrième Proportionnelle qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car la Droite BD étant Parallele à CE; on connoît aisément par le Coroll. 1 de la Prop. 4, que les Triangles ABD, AEC sont Semblables, & par 4., que la Droite AB ou N, est à AD ou X, comme BE ou Z à DC, & que par consequent DC, est Quatrième Proportionnelle aux trois Lignes N, X, Z; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION IX.

PROBLEME

Trouver une Moïenne Proportionnelle²³ entre les deux Lignes données HF,²⁴ fig. HG.

PREPARATION.

Joignés ces deux Lignes, de manière qu'elles composent la Droite GF, que vous diviserés en deux également en O, duquel O comme Centre, vous decrirés de l'ouverture OG ou OF, le demi Cercle GMF; du Point H, ou extrêmité commune des Lignes HF, HG, élevés la Perpendiculai-
N 4 re

re HM qui touche la circonference en M & que je dis être la Moïenne Proportionnelle qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Car en tirant les Lignes GM, MF, on connoît par 22, 3, que l'Angle GMF est Droit & par le Coroll. 1, de la Prop. 5, que cette Perpendiculaire MH est Moïenne Proportionnelle entre les Droites HG, HF qui sont les données ; ce qu'il falloit faire & démontrer.

COROLLAIRE.

23 *fig.*

Il suit évidemment de cette Proposition que si de quelque Point que ce soit, de la Circonference d'un Cercle, on abaisse une Perpendiculaire à son Diametre ; cette Perpendiculaire sera Moïenne Proportionnelle entre les Segmens ou parties de ce Diametre &c.





PROPOSITION X.

THEOREME.

Si les Parallelogrammes X, Z sont Equian- *Plan-*
gles & égaux, je dis qu'ils sont Réci- *che 2*
proques. *26 ou*

C'est-à-dire que la raison du côté GD au *25 fig.*
côté GH, est égale, à celle du côté GB au
côté GE.

Et que si ces Parallelogrammes sont
Equiangles & Réciproques, ils sont égaux.

PREPARATION.

Joignés ces Parallelogrammes, de sorte
que les côtez GD, GH fassent une Ligne
Droite HD; il est évident par 15, 1, que
GB, GE feront aussi une Ligne Droite
BE, à cause de l'Angle HGB égal, par
Supp., à l'Angle EGD; achevés le Paralle-
logramme GBCD.

DEMONSTRATION

Parce que les Parallelogrammes X, Z
sont égaux par l'Hypothese, il s'ensuit par
7, 5, qu'ils ont une même raison au Paral-
lelo-

lelogramme O, & qu'enfin, la raison de X à O étant, par 1, égale à celle de GH à GD & celle de Z à ce même O, égale à celle GE à GB; la raison du côté GH au côté GD, est, par égalité, égale à celle de GE à GB; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce qu'en supposant que la raison de GH à GD, est égale à celle de GE à GB, il s'ensuit par 1, que celle de X à O est aussi égale à celle de Z à ce même O, & que par conséquent ces Parallelogrammes X, Z sont égaux; ce qu'il restoit à démontrer.

COROLLAIRES.

I.

27 fig. Il suit de la première partie de ce Theoreme, que les Triangles égaux X, N, qui ont un Angle égal CDA, EDB, ont les côtez autour de cet Angle réciproquement proportionnels.

En sorte que DC sera donc à DB, comme DE à DA.

II.

I I.

Il fuit auffi de la feconde partie de cette *même* Proposition, que fi les Triangles X, N ont *fig.* un Angle égal, & les côtés autour de cet Angle reciproquement proportionnels, ils font égaux.

Car ces Triangles font, par 25, 1, moitiés des Parallelogrammes Equiangles & égaux DF, DG &c.

Si vous tirés la Droite AB, vous connoîtrez encore que les Triangles X, V, ont même hauteur AD & V, N, DB & par les raisons précéd. que &c.



PROPOSITION XI.

THEOREME.

SI les quatre nombres 8, 6, 4, 3, ou *Plan-* Lignes BA, BC, BF, BD font Pro- *che 2.* portionnelles, c'est-à-dire si la raison de BA *28. fig.* à BC est égale à celle de BF à BD, je dis que le Rectangle compris sous les extrêmes BA, BD, est égal au Rectangle sous les Moïennes BC, BF.

Et que si le Rectangle sous les extrêmes est égal au Rectangle sous les Moïennes, ces quatre Lignes sont Proportionnelles.

La Démonstration de ce Theoreme est inutile

inutile puisque par les raisons précédentes la chose n'est que trop évidente, car outre que ces Rectangles sont Equiangles ils ont les côtés réciproquement proportionnels à cause qu'on suppose que BC est à AB comme BF à BD .

PROPOSITION XII.

T H E O R E M E.

29 fig. **S**I les trois nombres 4¹, 3., 2 ou Lignes AB , AC , AF sont continuellement proportionnelles je dis que le Rectangle compris sous les extrêmes est égal au Rectangle sous la Moïenne, c'est-à-dire au Quarré de la Moïenne.

Et que si le Rectangle sous les extrêmes est égal au Quarré de la Moïenne, ces trois Lignes sont continuellement proportionnelles.

Car en prenant la Ligne M égale à AC , on connoîtra que AB est encore à AC comme cette même AC ou M , à AF & qu'enfin, les quatre Lignes AB , AC , M , AF étant proportionnelles, la Démonstration de ce Theoreme ne differe en rien de celle du précédent, & que par consequent &c.

CO-

COROLLAIRE.

D'où il suit que, si d'un Point pris à vo- 23 *fig.*
lonté dans circonference d'un Cercle on
abaisse une Perpendiculaire, à son Diame-
tre, le Quarré de cette Perpendiculaire sera
égal au Rectangle compris sous les Segmens
ou parties de ce Diametre.

Car cette Perpendiculaire étant, par le
Coroll. de la Prop. 9, Moienne propor-
tionnelle entre les parties de ce Diametre,
il s'ensuit par la précédente que son Quarré
est égal au Rectangle compris sous les par-
ties ou Segmens de ce Diametre ; ce qu'il
falloit démontrer.





PROPOSITION XIII.

P R O B L E M E.

Plan-
che 3
30 fig.

D Ecrire sur la Ligne donnée MN un Poligone Semblable au donné DCB.

P R E P A R A T I O N.

Après avoir divisé ce Poligone donné en Triangles B, C, D faites par 20, 1 à l'extrémité, de cette Ligne donnée l'Angle PMN égal à l'Angle SOQ & MNP égal à OQS & PMR égal à SOX & MPR à OSX & enfin RMK à XOÛ & MRK à OXG;

Je dis que la Figure TVW & Semblable au Poligone donné DCB.

D E M O N S T R A T I O N.

Car chaque Triangle de cette Figure TVW ayant, par Constr., deux Angles égaux à deux Angles de chaque Triangle de la Figure BCD, il s'ensuit par le Coroll. 5. de la Prop. 16 du Liv. 1., que chaque Triangle de la Figure TVW est Equiangle à chaque Triangle de la Figure BCD, & par 4., que le Triangle T est Semblable au
Trian-

GEOMETRIE. LIV. VI. 207

Triangle D & le Triangle V au Triangle C & qu'enfin le Triangle W est Semblable au Triangle B, & par le 1. Principe, que le Poligone TVW est Semblable au Poligone donné BCD, car outre que les parties de l'un, sont posées de la même façon que les parties de l'autre, chaque partie ou Triangle est même partie de son Poligone; ce qu'il falloit faire & démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de cette Proposition que deux Poligones Semblables se divisent en autant de Triangles Semblables l'un que l'autre &c.

LEMME.

Les Quarrés, comme AE, CF, sont en raison doublée de celle de leurs côtés AB, CD. 32 fig.

Car si par exemple le côté AB est 4, & le côté CD 2, vous connoîtrez aisément par la Définition 6. du Liv. 1, que le premier AE est composé de 16 petits Quarrés & que le second CF, l'est de 4, & que le premier AE, est au second CF, comme le côté AB, à la troisième proportionnelle X ou 1 aux deux côtés AB, CD, & par la Définition 15 du Liv. 5, que la raison du premier AE au second CF, est composée de celle de AB à CD & de celle de CD à X, & par la Définition 16 du même Liv., que ces

Quar-

Quarrés sont en raison doublée de celle de leurs côtés AB , CD ; ce qui suffit.

C O R O L L A I R E S.

I.

*même
fig.*

Il suit évidemment de ce Lemme que les Triangle Semblables ou Equiangle, comme O , N , sont en raison doublée de celle de leurs côtés Homologues, comme AB , CD .

Car ces Triangles étant mêmes parties de leurs Tous ou Quarrés AE , CF qui sont en raison doublée de celle de leurs côtés AB , CD ; on conclut évidemment par les 2. Principes, que ces Triangles le sont aussi de celle de leurs côtés Homologues AB , CD ou par Défin. 1., de celle des Homologues AG , CH &c.

I I.

31 *fig.*

Il s'ensuit encore que les Poligones Semblables, comme X , Z , sont en raison doublée de celle de leurs côtés Homologues, comme AB , CD .

Car si sur quelconques des côtés Homologues, on décrit des Quarrés, on connoîtra aisément par le Lemme précédent & par le 1. Principe, que ces Poligones sont en raison doublée de celle de leurs côtés Homologues EF , GH ou, par Défin. 1., de celle des Homologues AB , CD &c.

L.

*Le Corollaire suivant est la Proposition 2
du Liv. 12.*

III.

Les Figures Semblables étant en raison doublée de celle de leurs côtés Homologues, les Cercles le seront aussi de celle de leurs Diametres.

Car outre que les Cercles sont Figures Semblables leurs Diametres sont Homologues; & de plus ces Cercles sont mêmes parties des Quarrés qui leurs sont circonscrits & qui ont leurs côtés égaux aux Diametres de ces Cercles, & ces Quarrés sont en raison doublée de celle de leurs côtés, ou, par égalité, de celle des Diametres de ces Cercles, & ces Cercles le sont aussi de celle de ces Diametres par le 2 Principe &c.

IV.

Parce que les Quarrés sont en raison doublée de celle de leurs côtés, on conclut évidemment que les Figures Semblables sont en même raison que les Quarrés de leurs côtés Homologues.

Si par exemple le Quarré AE, a son côté AB, double de celui du Quarré CF, il est évident, par le Lemme précéd., qu'il sera Quadruple du Quarré CF. 32 fig.

Et que si un Quarré, a son côté Triple de celui d'un autre Quarré, le premier est Nonécuple du second ou est à ce second en raison de 9 à 1. &c.

O

Par

33 *fig.*

Par consequent si des deux Poligones Semblables A, B, le premier A, a son côté 9 Triple, de celui du second c'est-à-dire, de son Homologue 3, ce premier Poligone sera par le Coroll. précéd, neuf fois plus grand que ce Second ou, ce qui est la même chose, ce premier Poligone sera à ce Second, comme 9 à 1.; Car si à 9 & 3 vous cherchez une troisième proportionnelle 1, vous connoîtrez aisément par les raisons précédentes, que ce premier Poligone A, est à son Semblable B, comme 9 à 1. &c.

Cette Proposition nous enseigne une methode très facile pour augmenter ou diminuer une Figure donnée, selon une raison donnée.

35 &
37 *fig.*

Car si par exemple on propose de décrire un Triangle Sextuple du donné A, ou bien qui soit à ce donné A, en raison de 6 à 1, il est évident que, si après avoir trouvé une moyenne proportionnelle BF, entre une Ligne EB égale à un des côtés de ce Triangle comme BC, & une autre BA égale à six fois ce même côté, on décrit, par 13, sur cette moyenne BF un Triangle Equiangle au donné A, de manière que son côté BF soit Homologue au côté CB, ce Triangle sera six fois plus grand que le donné A.

DEMONSTRATION.

Car le Triangle décrit sur CB ou sur EB, c'est-à-dire A, étant à son Semblable décrit sur cette moyenne BF, comme EB ou BC

à

GEOMETRIE. LIV. VI. 211

à BA par le Coroll. de la Prop. 9, & le 1. du Lemme précéd.; & EB ou BC ne faisant que la sixième partie de BA, il est évident que le Triangle décrit sur EB ou BC c'est-à-dire A, ne fait aussi que la sixième partie du Triangle décrit sur BF & qu'ainsi ce Triangle décrit sur BF, est six fois plus grand que le Triangle donné A où qu'enfin ce Triangle décrit sur cette moyenne BF est à son Semblable A en raison de 6 à 1,

Il est aisé de comprendre par les raisons précéd., que si on proposoit de décrire un Poligone par exemple dix fois plus petit qu'un autre donné, il ne seroit question que de chercher une moyenne proportionnelle entre l'un de ses côtez, & la dixième partie de ce même côté, & de décrire sur cette moyenne un Poligone Semblable au proposé, de manière que cette moyenne qui serviroit de côté au Poligone trouvé fut Homologue au côté du premier Poligone, dont on s'est servi pour trouver cette moyenne; car le Poligone dont le côté est 10, seroit au Poligone Semblable décrit sur cette moyenne, comme 10 à 1, & par consequent il seroit &c.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment des raisons précédentes, que si trois Lignes sont continuellement Proportionnelles, le Poligone décrit sur la Première est à son Semblable décrit semblablement sur la Seconde, comme la

Première Ligne à la Troisième ; car ce premier Poligone étant à ce second en raison doublée de la première Ligne à la Seconde par le Coroll. 2. du Lemme précéd., il s'ensuit que, puisque ces trois Lignes son continuellement Proportionnelles par supp., le &c.

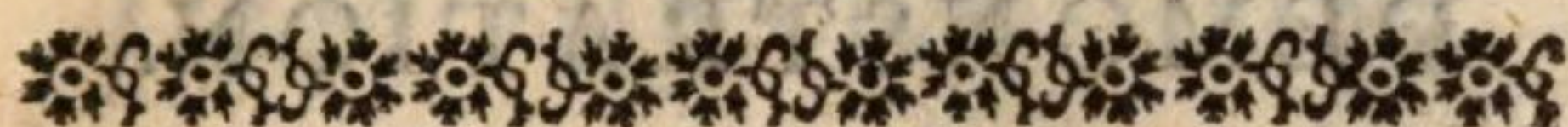


PROPOSITION XIV.

THEOREME.

SI deux Poligones sont Semblables à un Troisième ils seront Semblables entr'eux. C'est ce qui est très évident en conséquence de l'Axiom. 3. du Liv. 1.





PROPOSITION XV.

THEOREME

SI les Lignes A, B, C, D sont Proportionnelles, les Figures Semblables décrites sur elles le seront aussi. 34 fig.

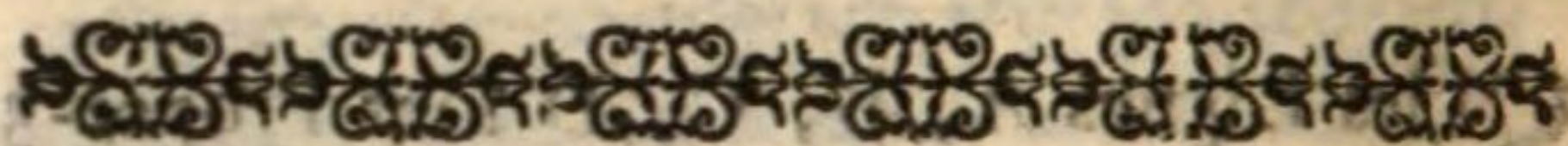
Et si ces Figures Semblables sont Proportionnelles, ces quatre Lignes le seront de même.

DEMONSTRATION.

Parce que la Ligne A est, par Supp., à la Ligne B, comme la Ligne C à la Ligne D, & que, par le Coroll. 2. du Lemme précéd., la Figure E est à sa Semblable F en raison doublée de celle de A à B, & la Figure G à la Figure H en raison doublée de celle de C à D ou, par égalité, de celle de A à B, on conclut évidemment par la Défin. 7 du Liv. 5 que les Figures E, F, G, H sont Proportionnelles; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Et qu'enfin, ces Figures étant Proportionnelles, les Lignes A, B, C, D le font de même par l'inverse de cette même Défin. 7; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Plan-
che 4.
39. fig.

Les Parallelogrammes Equiangles sont en raison composée de celles de leurs côtés, AB, BE, BC, BD.

De sorte que le Parallelogramme AC est au Parallelogramme DE comme l'unité est à l'exposant, produit de la multiplication de ceux des raisons de AB, à BE de BC à BD.

On a fait voir par la Défin. 15. du Liv. 5. qu'une raison composée étoit produite par la continuelle multiplication des exposans d'autres raisons.

Que AB soit, par exemple 6, BC 2, BE 9 & BD 8.

Le Parallelogramme AC sera donc 12, puisque 2 fois 6 font 12, & le Parallelogramme DE 72 d'autant que 8 fois 9 font 72.

DEMONSTRATION.

Si on confidere que l'exposant de la raison du côté AB au côté BE est $1\frac{1}{2}$ & celui de BC à BD 4, on connoitra aisément, en multipliant ces exposans $1\frac{1}{2}$, 4 l'un par l'autre, que leur produit 6 est veritablement l'exposant de la raison qu'il y a entre les deux Parallelogrammes AC, DE; car comme l'unité 1, ne fait que la fixième partie de 6, de même le Parallelogramme AC ou 12 ne fait que la fixième partie du Parallelogramme DE ou 72; ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Si vous voulés une autre démonstration *même* achevés le Parallelogramme BCEF. *fig.*

DEMONSTRATION.

Parce que le Parallelogramme AC est au Parallelogramme BF, comme AB à BE par 1., & que BF est, par la même, à DE, comme CB à BD, il s'ensuit par la Défin. 15. du Liv. 5, que la raison de AC à DE est composée de celles de AC à BF, de BF à DE ou, par égalité, de celles de AB à BE, de BC à BD; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

*même
fig.*

D'où il fuit que la raison des Triangles, comme ABC BDE , qui ont l'Angle égal opposé B , est composée de celles de leurs côtés AB , BE , BC , BD ,

Car les Triangles sont moitiés des Parallelogrammes Equiangles, qui sont par la précéd. &c.

II.

Il s'ensuit encore que les Triangles ou Parallelogrammes qui ont un Angle & un côté égal sont entr'eux comme le côté inégal &c.





PROPOSITION XVII.

THEOREME

SI la Diagonale AC, du Parallelogramme BD, passe par les Pointes des Angles du Parallelogramme FG, ce Dernier sera semblable au premier ED. *Planche 3. 36 fig.*

DEMONSTRATION.

Car ces deux Figures BD, FG étant des Parallelogrammes, on connoît aisément par 22, 1 que leurs côtés sont Paralleles, & par le Coroll. 1. de la Prop. 4, que le Triangle AFE, est semblable au Triangle ABC, & que le Triangle AGE, est semblable au Triangle ADC & par le premier Principe, que le Parallelogramme FG, est semblable au Parallelogramme BD, car outre que chaque Triangle est moitié de son Parallelogramme, les deux qui composent le Parallelogramme FG sont joint de la même façon que les deux qui composent le Parallelogramme BD; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

I.

D'où il suit que, si les Parallelogrammes FG, BD sont semblables, & ont un Angle commun, comme par exemple l'Angle FAG; la Diagonale du grand rencontrera l'Angle du petit, de sorte que la Diagonale du petit fera partie de la Diagonale du grand.

C'est ce qui est très évident par les raisons précéd., & par le Coroll. 2. de la Prop. 4, &c.



PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

Plan-
che 4
40 &
41 fig.

DEcrire une Figure égale à la donnée X, & Semblable au Poligone Z.

PREPARATION.

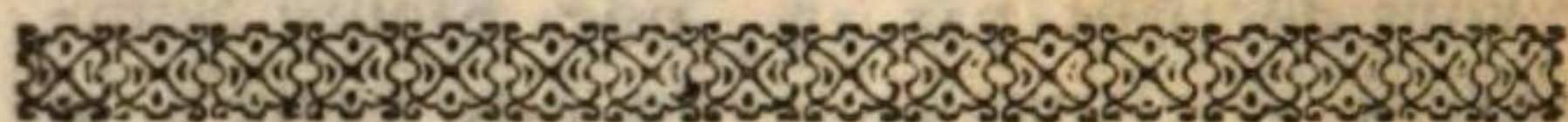
Décrivés, par 31, 1, sur le côté B, le Parallelogramme O égal à Z, & sur le côté BV, le Parallelogramme N égal à X & cherchés par 9 une moyenne proportionnelle

nelle A, entre les côtez B, C, sur la quelle vous décrirés par 13, une Figure Semblable à Z, laquelle je dis être égale à la donnée X.

DEMONSTRATION.

Car outre que O est, par Constr., égal à Z & N à X, les Lignes B, A, C sont continuellement Proportionnelles par la Définition. 11. du Liv. 5, & la Figure Z décrite sur B est, par le Coroll. qui est avant la Prop. 14, à sa Semblable décrite sur A, comme B à C, ou par 1. comme O à N, ou, par égalité, comme Z à X; par conséquent la Figure Z ayant même raison à sa Semblable décrite sur A qu'à la Figure X, il s'ensuit que la Figure décrite sur A, est égale à la Figure X & Semblable à la Figure Z; ce qu'il falloit faire & démontrer.





PROPOSITION XIX.

P R O B L E M E.

Plan-
che 3
38 fig.

Couper la Ligne donnée AB selon l'Extrême & Moïenne raison, c'est-à-dire de manière que la Toute AB soit à sa plus grande partie AC, comme cette plus grande partie à la plus petite BC.

PREPARATION.

Si par 11, 2, on divise AB de manière que le Rectangle compris sous BA BC soit égal au Quarré de AC on connoïtra qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

DEMONSTRATION.

Car le Rectangle O compris sous BD, égale, par constr., à BA, BC, étant égal au Quarré Q compris sous AC, il s'ensuit par 12, que BD ou AB est à AC, comme AC à CB; ce qu'il falloit démontrer.



PRO-



PROPOSITION XX.

THEOREME.

SI sur les trois côtés du Triangle Rectan- *Plan-*
gle ABC, on décrit trois Figures Sem- *che 4*
blables E, F, D, & Semblablement po- *42 fig.*
sées, je dis que la Figure D, décrite sur le
côté opposé à l'Angle Droit B, est égale à
la somme des deux autres E, F.

DEMONSTRATION.

Car ces Figures Semblables étant, par le
Coroll. 4 du Lemme précédent, en même,
raison que les Quarrés de leurs côtés Ho-
mologues, il s'ensuit que la Figure D est
égale à la somme des deux autres E, F,
parce que le Quarré de CA est égale à ceux
de CB de BA par 34, 1.; ce qu'il falloit dé-
montrer.

C O R O L L A I R E.

Il suit évidemment de cette Proposition, que la partie ponctuée du Quarré de CA, est égale à la somme des parties ponctuées des Quarrés de CB, de BA, & que ces Figures ponctuées sont Semblables entr'elles, & qu'enfin elles sont en même raison que les Quarrés, dont elles sont mêmes parties, ou, par égalité, que les Figures D, E, F.



P R O P O S I T I O N X X I.

T H E O R E M E.

43 *fig.*

DAns les Cercles égaux X, Z, les Angles tant au Centre qu'à la circonférence sont en même raison que les Arcs qui leurs servent de bâses.

On entendra la même chose des Secteurs EAF, GBH.

DEMONSTRATION.

Car si par exemple l'Arc EF est de 60 degrés & l'Arc GH de 120, il est très évident, par la Définition. 10 du Liv. 1, que l'Angle A est autant plus petit que l'Angle B, que l'Arc EF est de moins de degrés que l'Arc GH, & que par conséquent l'Angle EAF est à l'Angle GBH, comme l'Arc EF à l'Arc GH; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

Parce que les Angles D, C à la circonférence sont moitié de ceux au Centre par 17, 3, il s'ensuit par les raisons précédentes que ces Angles D, C sont entr'eux comme les Arcs qui leurs servent de bâses; ce qui restoit à démontrer.

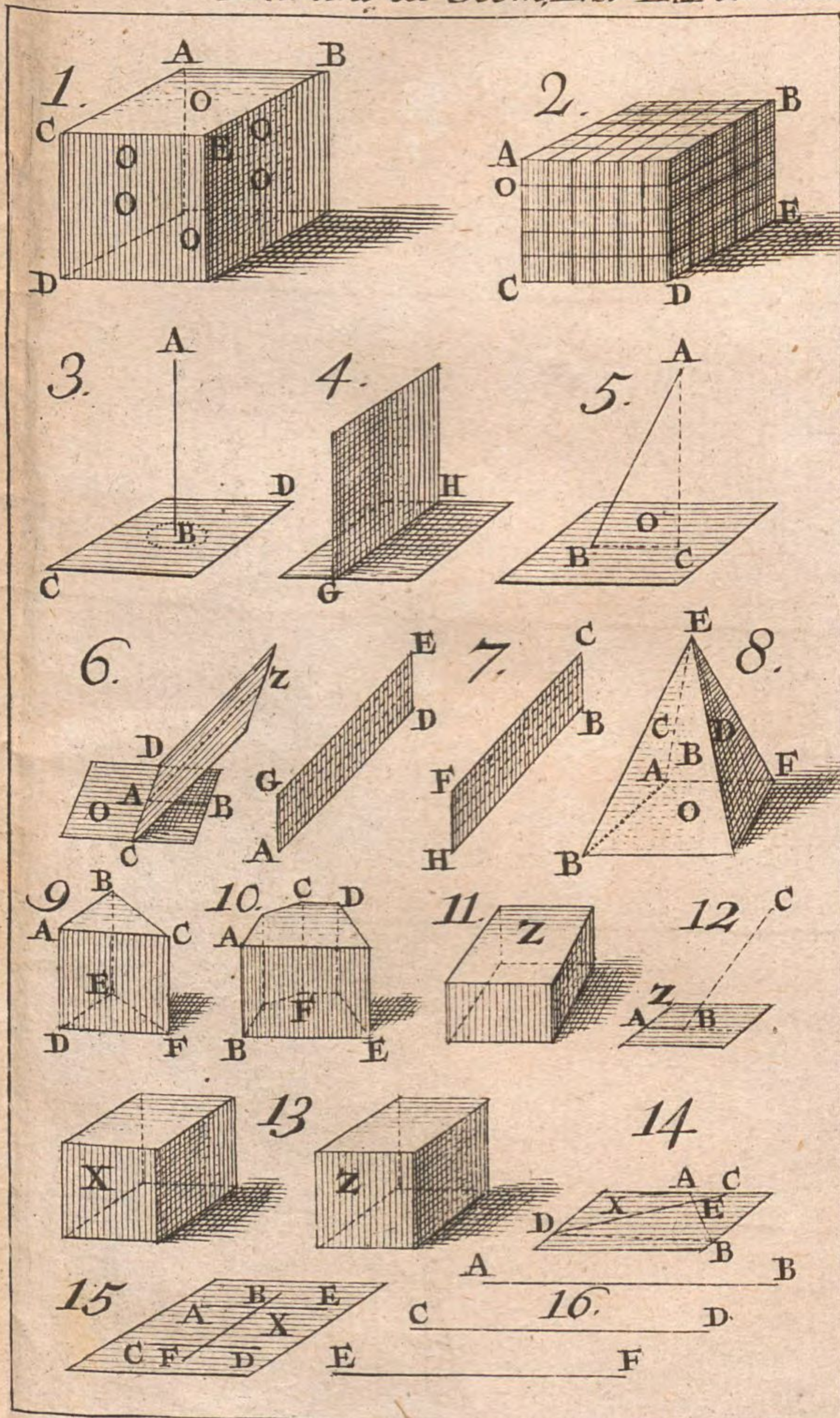
DEMONSTRATION.

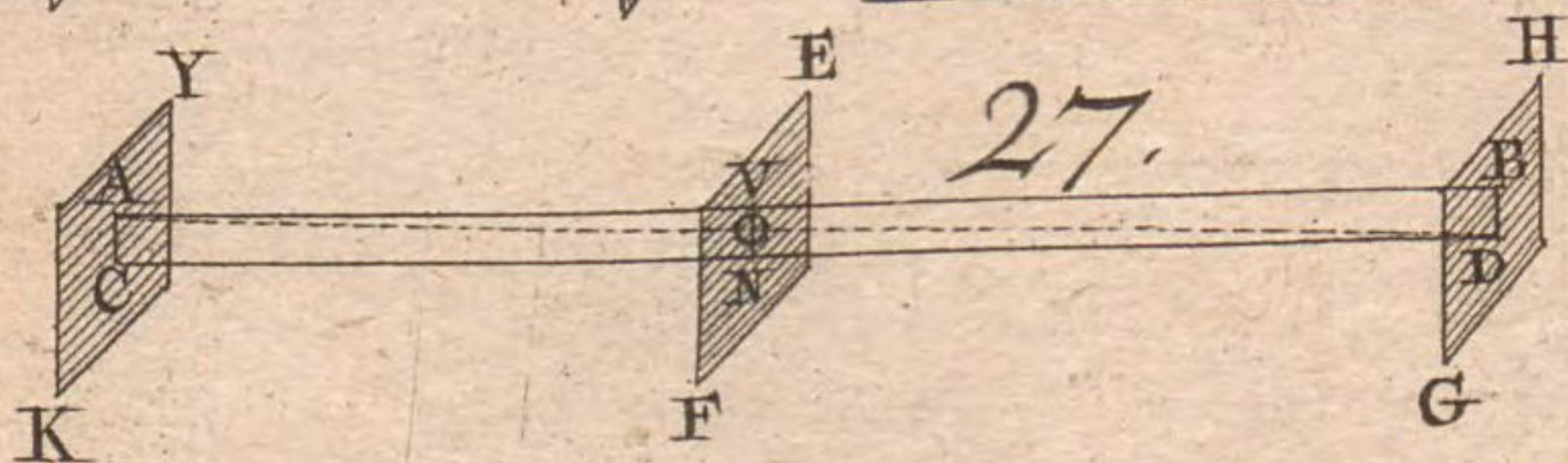
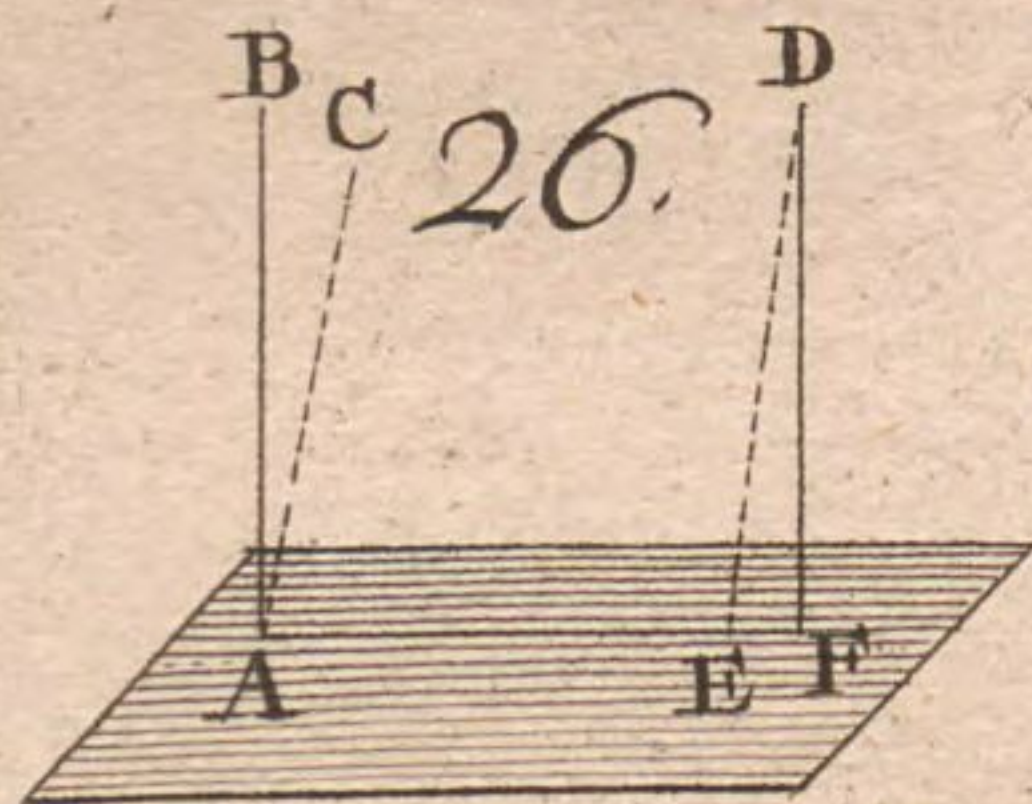
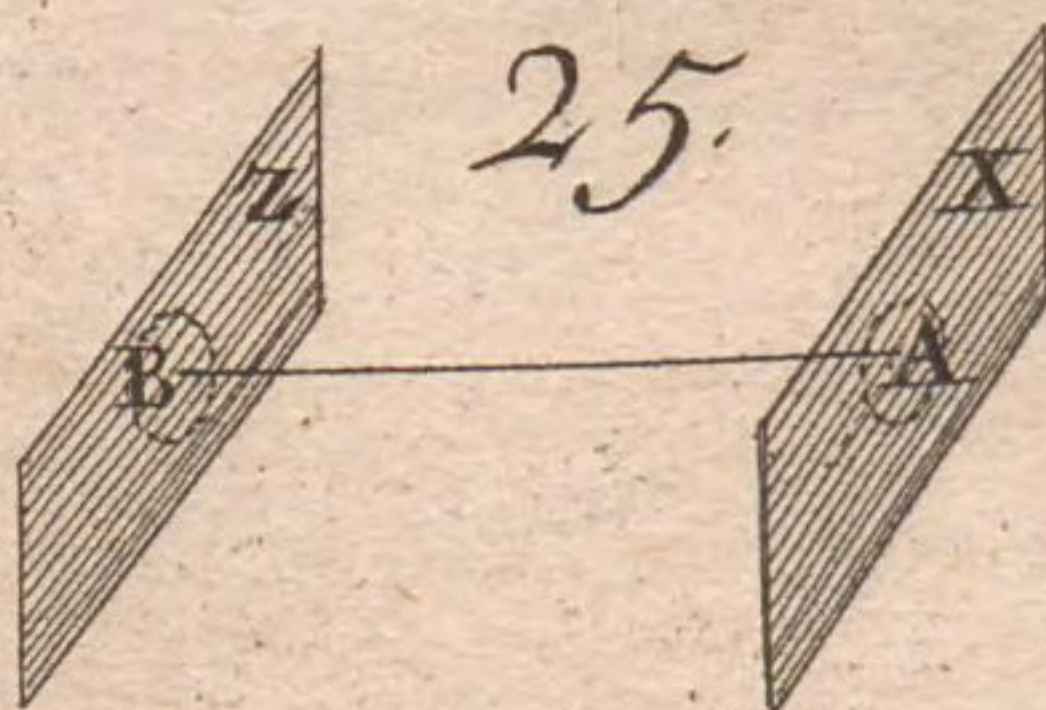
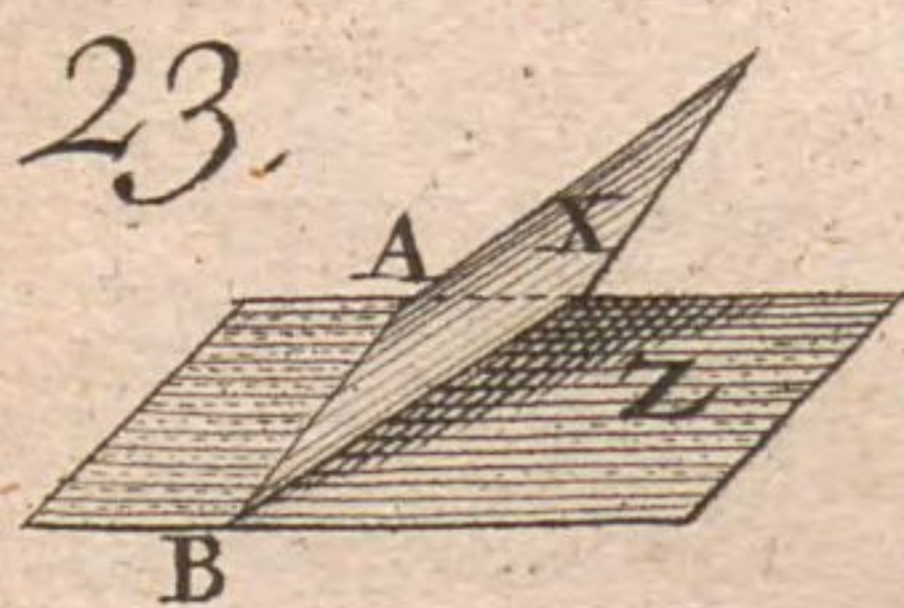
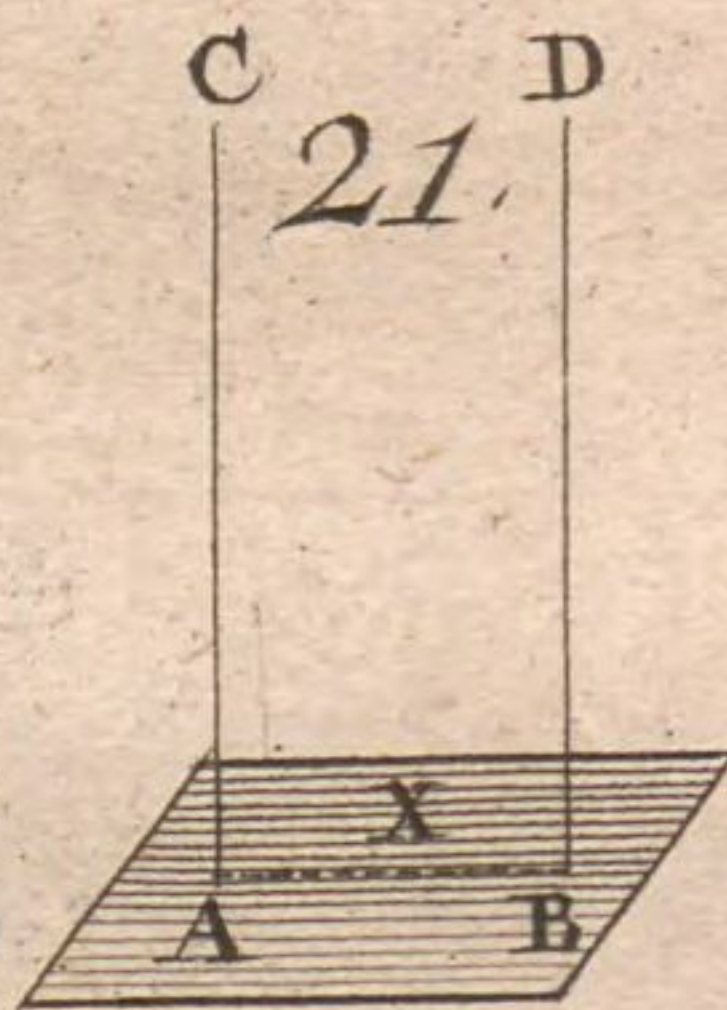
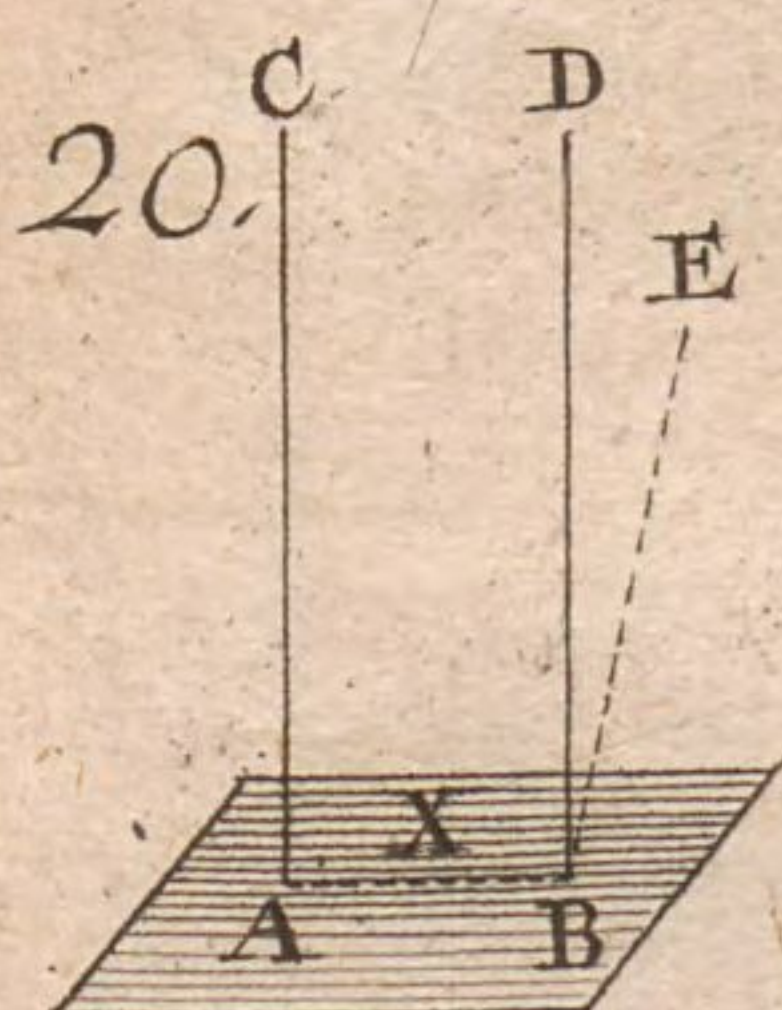
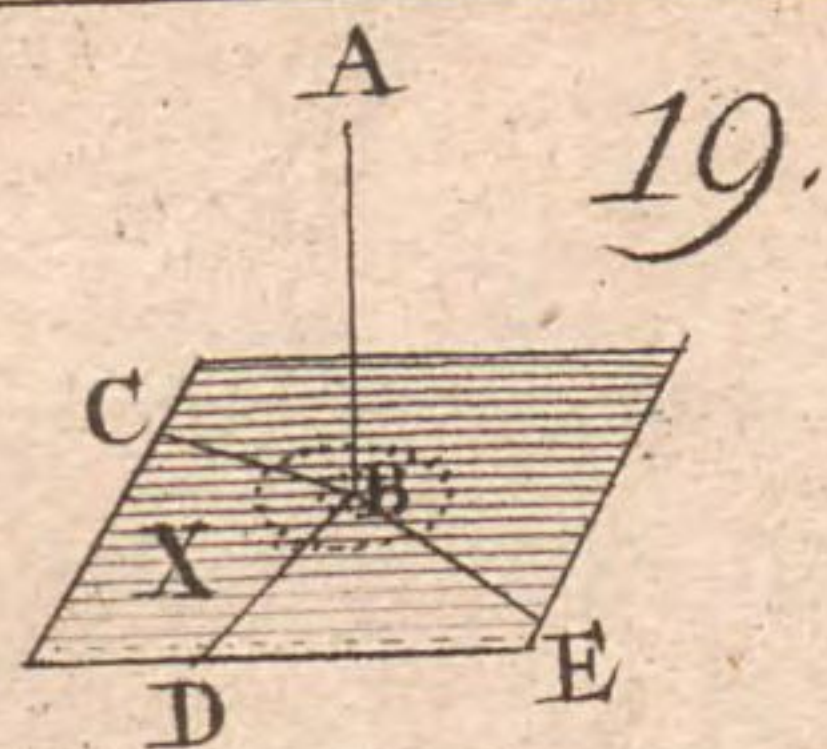
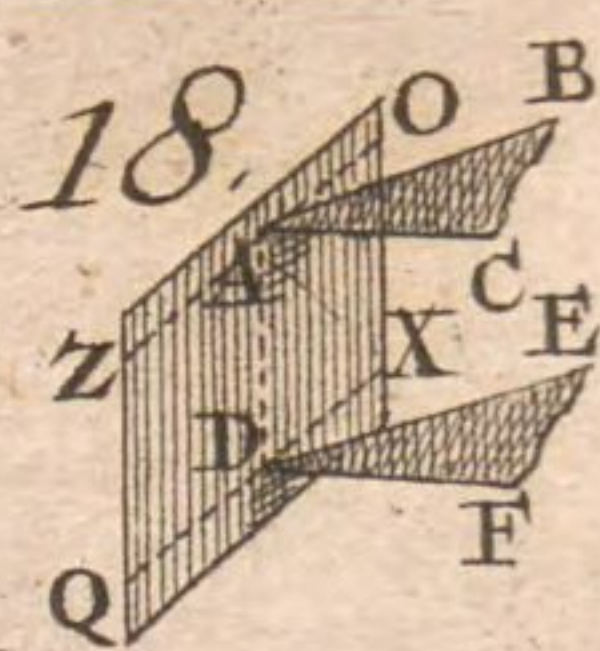
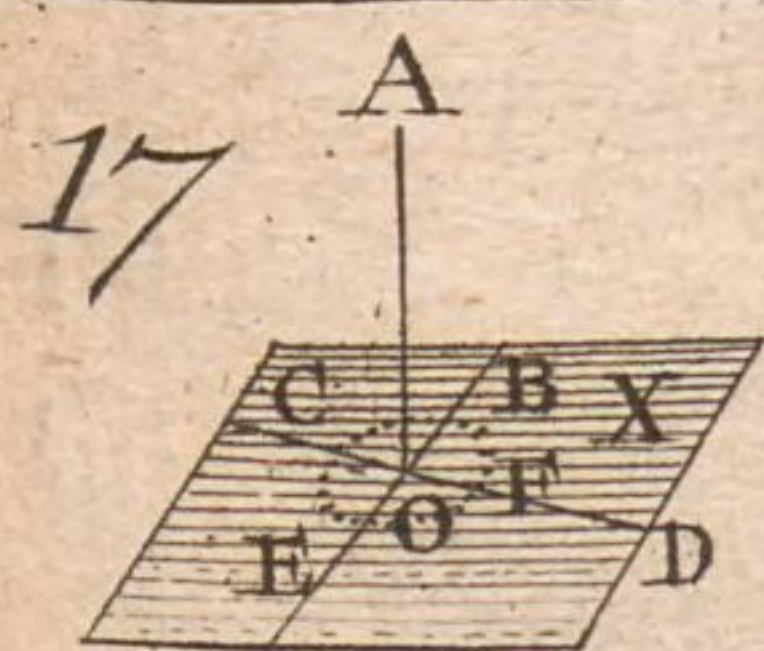
Parce que les Cercles X, Z, sont égaux par supp., comme aussi les hauteurs AE, BG par la Définition. 1. du Liv. 3, il s'ensuit que les Secteurs EAF, GBH sont en même raison que leurs bâses ou Arcs EF, GH, car l'Arc GH étant par supp. double de l'Arc EF, il est évident que le Secteur
GBH

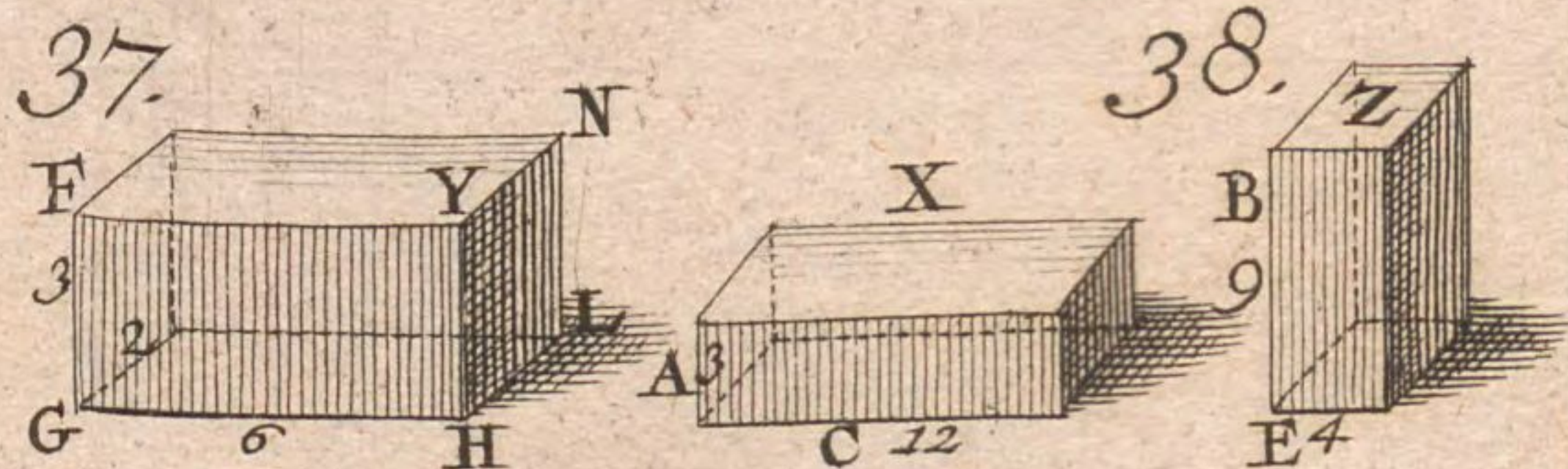
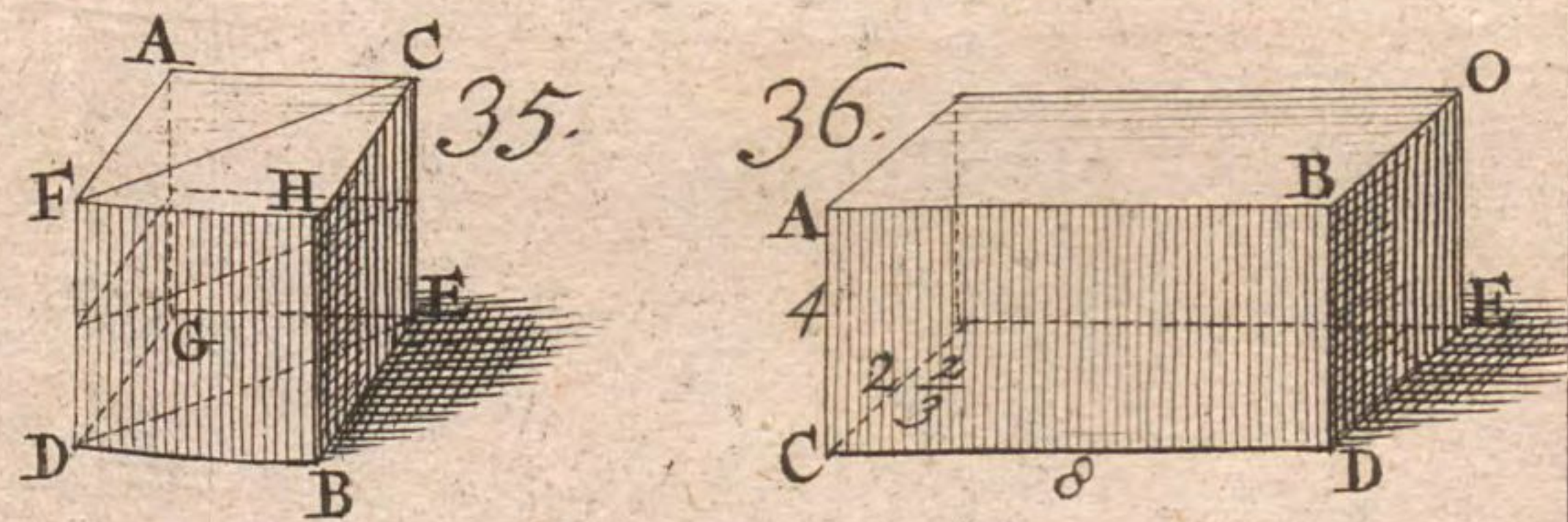
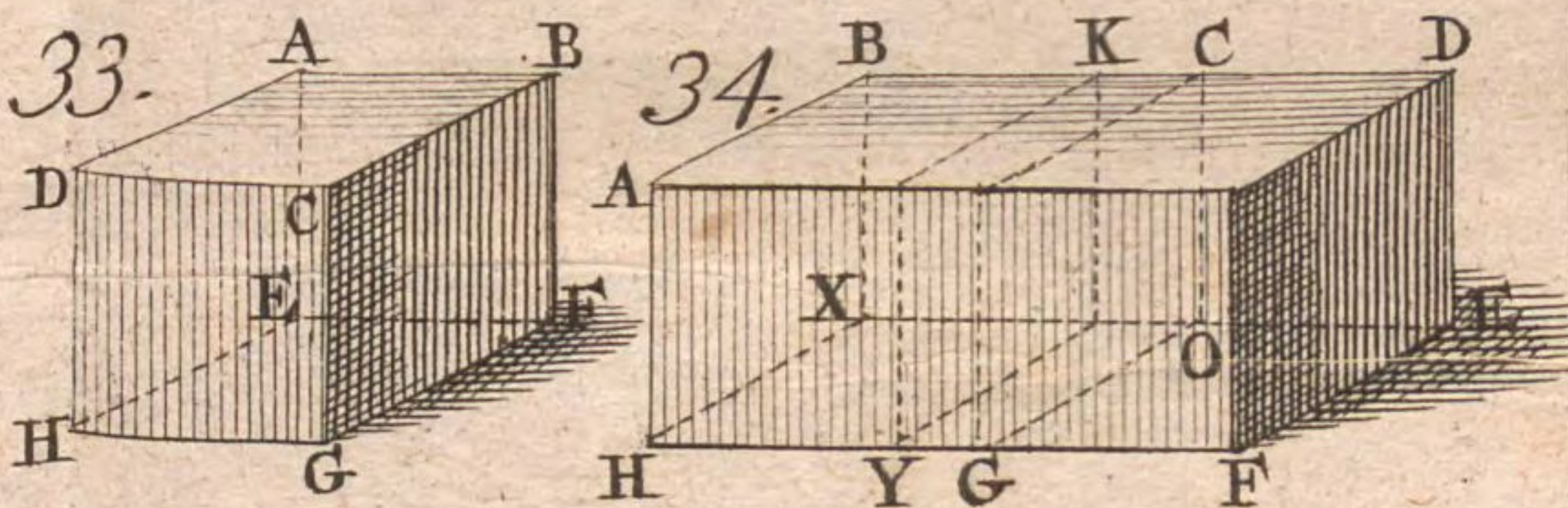
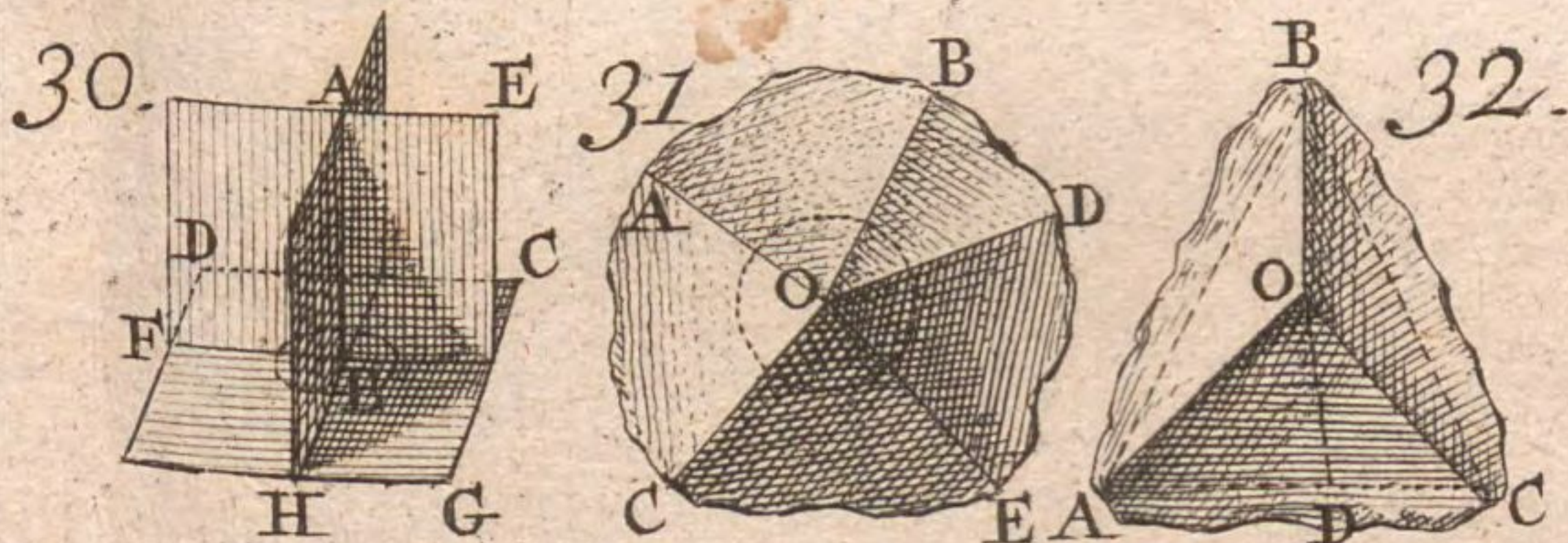
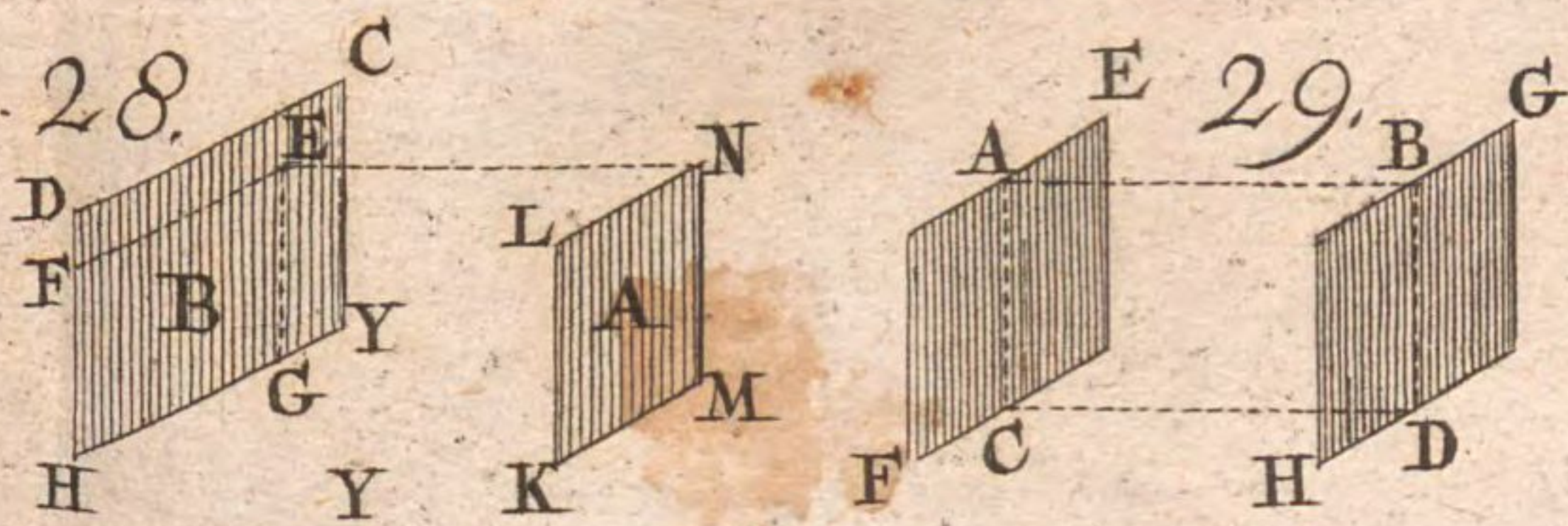
GBH l'est aussi du Secteur EAF, & que par conséquent il y a même raison du Secteur GBH au Secteur EAF, que de l'Arc GH à l'Arc EF; ce qu'il falloit démontrer.

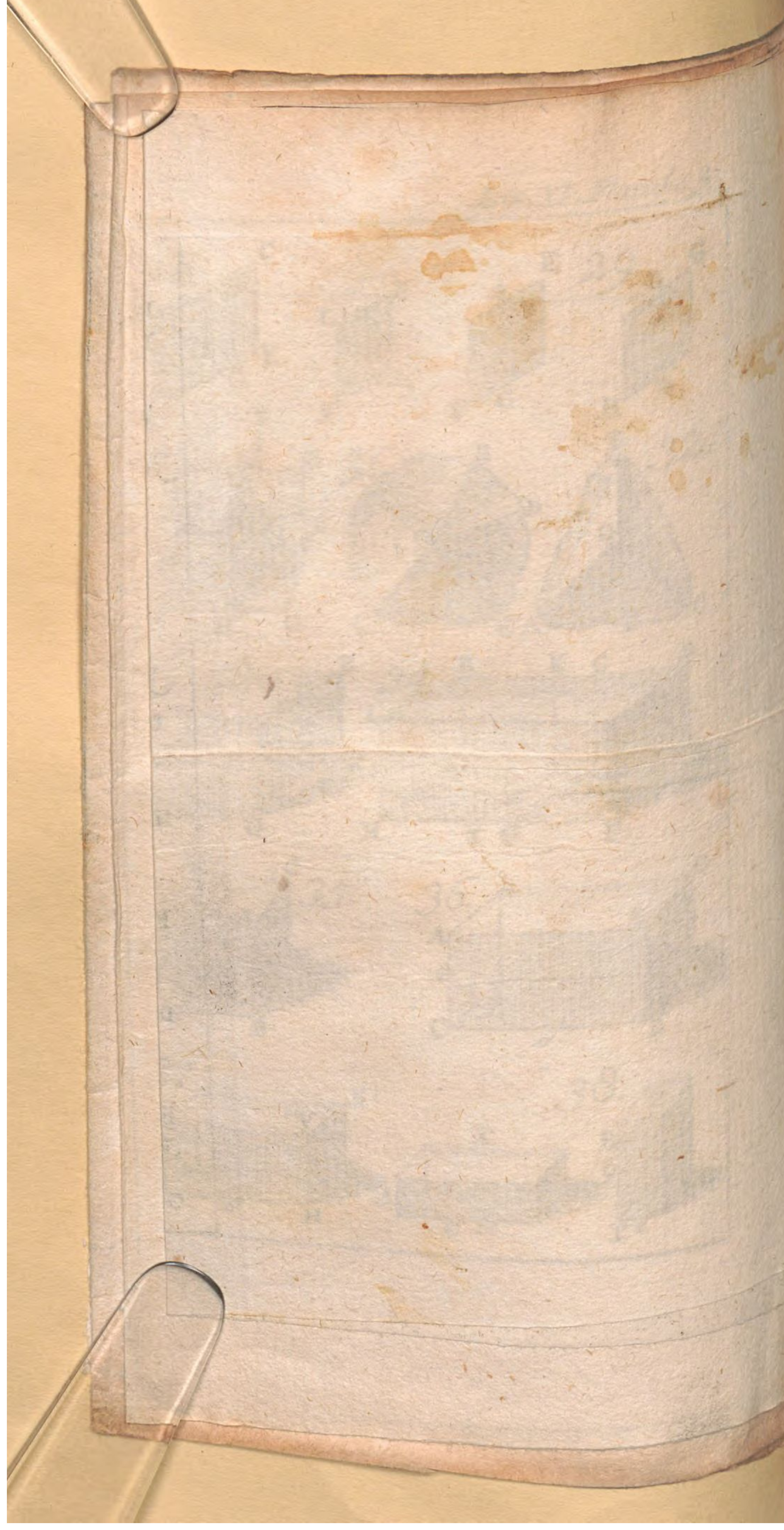
Fin du Livre sixième.



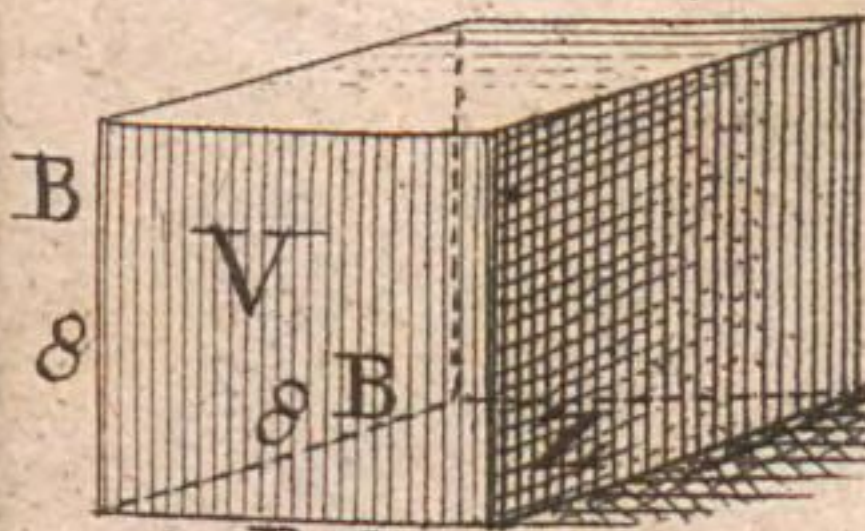








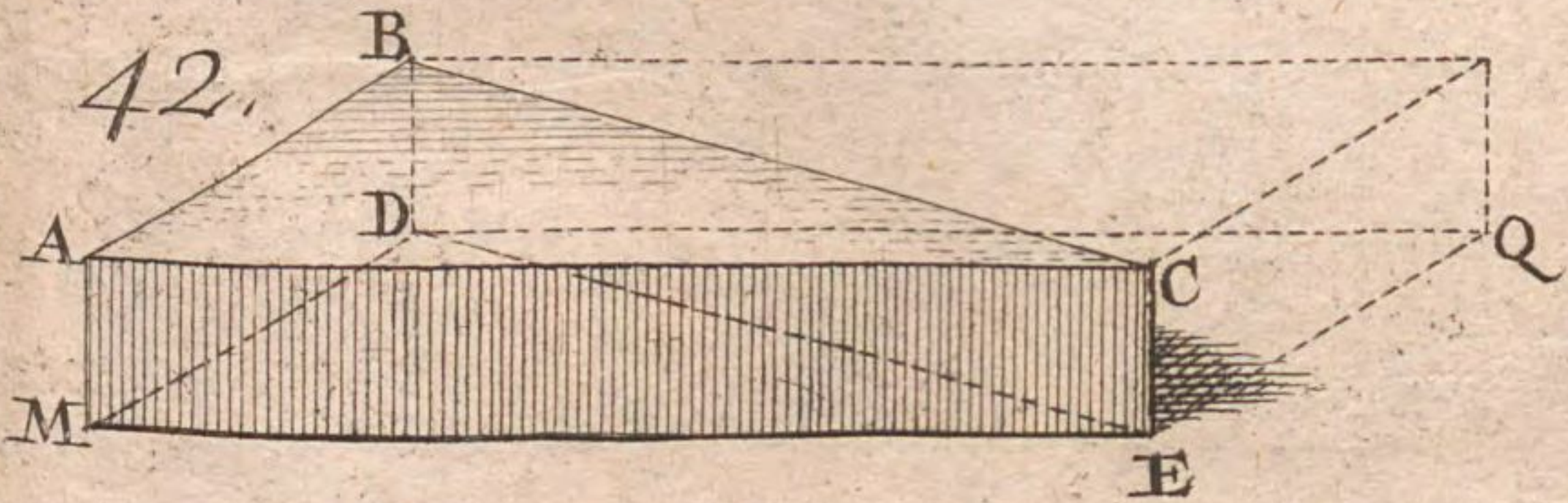
39.



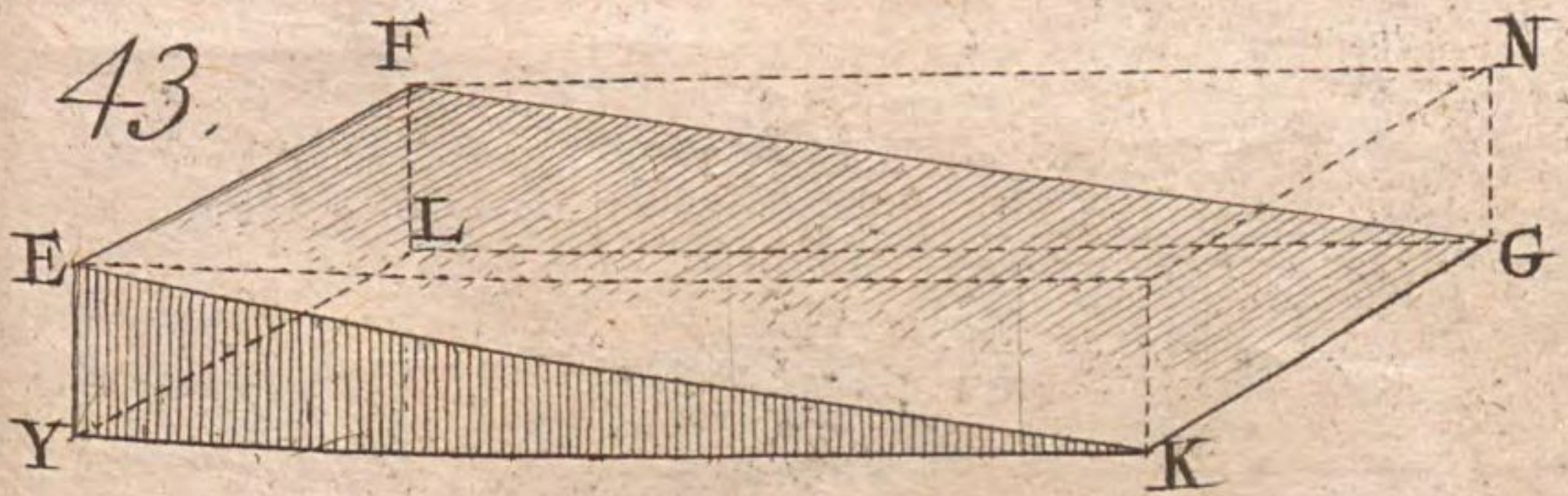
$$\frac{A B 8}{4} 40. \quad \frac{B}{8} 40. \quad \frac{C 16}{16} C$$

$$\frac{A}{64} 41. \quad \frac{B}{16} \quad \frac{C}{4} 41. \quad \frac{D}{1}$$

42.



43.



$$A 8 \quad 44. \quad B 4 \quad 44. \quad C 6 \quad D 3$$





ELEMENTS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE ONZIEME



UCLIDE s'étant étendu suffisamment, dans les six Livres précédens, sur cette partie de Geométrie Plane, son dessein dans celui-ci, est de nous rapporter cette partie de Geométrie, dans laquelle il considere les propriétés des Corps ou Solides.

Il traite premierement des Parallelepipèdes & des Prismes ; il nous fait voir au
P com-

commencement plusieurs propriétés touchant les Surfaces qui les bornent, aussi nous enseigne-il à mesurer les plus Réguliers, & de plus il nous en donne les premiers principes; de sorte que ce Livre est d'une grande utilité, & d'autant plus qu'il est impossible à celui qui l'ignore, de pouvoir conclure la moindre chose de cette troisième partie de la Geométrie, pratique qu'on appelle Stéréométrie; ni même de pouvoir établir la moindre chose touchant cette troisième espece de la Quantité, sans sçavoir ce qu'il nous enseigne.



DEFINITIONS

I.

Du Corps ou Solide.

ON appelle Corps tout ce qui est étendu en longueur, largeur, & profondeur ou épaisseur &c.

En concevant que la Ligne est causée par le mouvement du Point & la Surface par le mouvement de la Ligne, il sera aisé de concevoir que le Corps est produit par le mouvement de la Surface, & que la Ligne étant composée d'une infinité de Points, & la Surface d'une infinité de Lignes, le Corps l'est d'une infinité de Surfaces, d'où il suit.

II.

Que les Extrémités d'un Corps comme *Plan-DB* sont les Surfaces $\circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ$, *che I* qui le bornent. I fig.

III.

Ce Corps DB, dont la forme est comme celle d'un dez à jouer, est appelé Cûbe, parce qu'il est borné par six Quarres égaux entr'eux.

REMARQUE.

On a dit que l'Aire d'un Rectangle se mesuroit par des petits Quarrez, & on dira ici que la Solidité d'un Corps Rectangle se mesure par des petits Cûbes semblables au Précédent; de manière que pour mesurer la Solidité du Corps Rectangle CB, dont je suppose la longueur CD, de sa bûse, de 6 2 fig. pieds, & la largeur DE de 5 & la hauteur BE ou AC de 5; on fera une continuelle multiplication de ses trois dimensions, en sorte qu'après avoir multiplié la longueur CD 6, par la largeur DE 5, le produit 30 sera encore multiplié par la hauteur AC 5, le quatrième nombre 150 sera la Solidité du Corps CB, ou ce nombre 150, sera celui des petits pieds Cûbiques qui composent le Solide CB.

Car multipliant CD 6 par DE 5, le produit 30 est, par la Déf. 6 du Liv. I, le

contenu de la b  se AB, & multipliant AB 30 par AC 5, le produit 150 est évidemment la somme des pieds Cubiques qui composent le Solide CB; car le solide OB l'étant visiblement de 30, & CB de 5 comme est le Solide OB, qui est 30; il est aisé de conclure que le Solide CB est composé comme auparavant de 150 pieds Cubiques, parce que cinq fois le Solide OB ou 30, fait le nombre 150.

I V.

3 *fig.*

La Ligne AB sera dite Perpendiculaire au Plan CD, si son extrémité A est également éloignée des Points de la circonférence du Cercle B décrit de l'autre extrémité B, de cette Ligne AB.

V.

4 *fig.*

Le Plan 4GH sera dit Perpendiculaire au Plan GH, si les Perpendiculaires abaissées à la commune Section HG, le sont aussi à ce Plan GH.

V I.

même
fig.

La Ligne HG, est appell  e commune Section des deux Plans 4GH, GH parce qu'elle est partie commune de ces deux Plans.

V I I.

V I I.

Si la Ligne AB n'est pas Perpendiculaire ⁵ *fig.*
au Plan O, que AC la lui soit; tirés la Droite
BC.

L'Angle ABC compris entre la Ligne
AB & la Ligne BC, est appelé Angle d'in-
clinaison de cette Ligne AB au Plan O.

V I I I.

L'Inclinaison des deux Plans O, Z est ⁶ *fig.*
déterminée par l'Angle Aigü ZAB compris
entre les Lignes ZA, AB que je suppose
être Perpendiculaires à la commune Section
CD.

I X.

Lorsque les Angles d'Inclinaison, de
deux Plans sont égaux, on dit que ces
Plans sont semblablement inclinez.

X.

Si les Plans AGED, HFCB sont Paral- ⁷ *fig.*
leles, je dis que si on les continuë, ils ne se
rencontreront jamais.

Car si par la pensée on tire dans ces Plans
des Lignes Ponctuéés, de manière qu'elles
soient Paralleles entr'elles, il est évident que
les ponctuéés du Plan GD le feront aussi à
celles du Plan HC; à cause qu'on suppose
que ces Plans le sont de même; & qu'en-
fin si on continuë ces Lignes ponctuéés,

autant que l'on voudra, elles ne se rencontreront pas par la Définition 24. du Liv. 1. ni par conséquent ces Plans, puisqu'aucunes de leurs parties ne le peuvent.

X I.

13 fig.

Les Solides Semblables sont ceux qui sont terminez par autant de Plans Semblables l'un que l'autre, comme deux Cûbes.

X I I.

Les Solides X, Z sont dits Semblables & égaux, s'ils contiennent un égal nombre de Plans Semblables & égaux, de sorte donc que si par la pensée, on suppose que ces Solides se pénètrent, ils ne doivent pas se surpasser.

X I I I.

8 fig.

La Piramide est un Solide borné par plusieurs Plans Rectilignes qui se terminent en Pointes, & dont la bête est un Triangle, un Quadrilatere ou un Poligone.

Le Solide EO, qui est borné par quatre Triangles A, B, C, D, & dont la bête est un Quadrilatere, sera donc appelé Piramide.

X I V.

même
fig.

La Pointe de cette Piramide Quadrangulaire est appelé Angle Solide, parce qu'il est compris entre plus de deux Angles Plans.

X V.

X V.

Si l'on s' imagine que la Ligne AD par-9 fig.
court Perpendiculairement les contours des
deux Plans Rectilignes ABC, DEF, que je
suppose être Paralleles & égaux en tout sens,
il est évident qu'elle décrira par ce mouve-
ment la Figure DBF qu'on appelle Prisme.

*Tout Solide, qui a deux Plans opposés Pa- 10 &
ralleles & égaux en tout sens & les autres Plans 11 fig.
Parallelogrammes, est appelé Prisme.*

X V I.

Le Solide Z, borné par six Parallelo- 11 fig.
grammes dont les opposez sont Paralleles &
égaux en tout sens, est appelé Parallelepi-
pede.





PROPOSITION I.

T H E O R E M E.

12 fig. **L**A Ligne Droite AB étant continuée ne peut avoir une de ses parties dans le Plan Z & une dehors.

DEMONSTRATION.

Car en continuant cette Ligne AB, il est évident que son prolongement sera dans ce Plan Z & que par conséquent ce ne peut être BC qui en sorte, à cause que ABC n'est pas une Ligne Droite &c.

COROLLAIRE.

14 fig. D'où il suit que les Lignes AB, CD, qui se coupent au Point E, sont dans le même Plan X, comme aussi le Triangle DEB terminé par ces Lignes & la Droite BD &c.



PROPOSITION II.

THEOREME.

LA commune Section des deux Plans X, *plan-*
Z est une Ligne Droite AB. *che 2.*
23. fig.

DEMONSTRATION.

Parce qu'entre les deux Points A , B , on ne peut mener qu'une Ligne Droite par la Défin. 4. du Liv. 1 , il s'ensuit que AB en est une ; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION III.

THEOREME.

SI la Ligne AO , abaissée sur la Section 17 *fig.*
O , des Lignes EB , CD , est Perpen-
diculaire à ces Lignes , elle la fera aussi au
Plan X de ces Lignes.

DEMONSTRATION.

Car si du Point O vous décrivés le Cercle O, vous connoîtrez aisément par sa Définition, que les rayons ou parties retranchées des Lignes CD, EB, sont égales entr'elles & par l'Hypothese, que le Point A est également éloigné des quatre Points C, B, E, F, de la circonference du Cercle O, & par le Coroll. de la Prop. 7 du Liv. 3, que ce Point A est également éloigné de tous les Points de la circonference de ce Cercle, & par Définition. 4, que cette Ligne AO, est aussi Perpendiculaire au Plan X des Lignes EB, CD; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

THEOREME.

*Plan-
che 2
19 fig.*

SI la Ligne AB, abaissée sur la Section B, est Perpendiculaire aux trois Lignes BC, BD, BE, je dis que ces trois Lignes sont dans le même Plan X.

DE-

DEMONSTRATION.

Car si du Point B, vous décrivez le Cercle B, vous connoîtrez aisément par la précéd., que la Ligne AB, est aussi Perpendiculaire au Plan X, & qu'ainsi ces trois Lignes ne peuvent être hors de ce Plan; car si l'une ou l'autre en sortoit elle s'approcheroit ou s'éloigneroit du Point A, & en ce cas la Ligne AB ne lui seroit plus Perpendiculaire, ce qui seroit contre la supposition, donc &c.



PROPOSITION V.

THEOREME.

SI les Lignes AC, BD sont Perpendiculaires au Plan X, je dis qu'elles sont Paralleles entr'elles. 21 fig.

DEMONSTRATION.

Car les Angles CAB, DBA étant Droits par supposit., il s'ensuit par le Coroll. de la Prop. 21. du Liv. 1., que ces Lignes AC, BD sont Paralleles; ce qu'il falloit démontrer.

PRO-



PROPOSITION VI.

T H E O R E M E.

*Plan-
che I
15 fig.*

LA Droite FB qui coupe les Paralleles EA, CD, est dans leur même Plan X.

DEMONSTRATION.

Car cette Ligne FB étant, par la Définition. 4. du Liv. 1., la plus courte de toutes les Lignes qu'on puisse mener entre les deux Points F, B, il est aisé de conclure, que cette Droite FB, est dans le Plan X des Paralleles EA, CD; ce qu'il falloit démontrer.

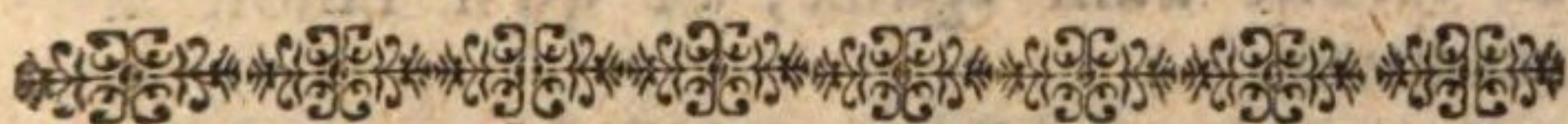




PROPOSITION VII.

THEOREME.

SI les Lignes AC, BD sont Paralleles, je *Plan-*
dis que si l'une est Perpendiculaire *au che 2*
Plan X, l'autre l'est aussi. *21 fig.*
C'est ce qui est évident par 5.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

SI les deux Lignes AB, AC sont Paral- *18 fig.*
leles aux deux DE, DF de different
Plan, je dis que les Angles A, D, com-
pris entre ces Lignes, sont égaux.

PREPARATION.

Tirés le Plan OQ.

DE-

DEMONSTRATION.

Parce qu'on suppose que la Ligne AC est Parallele à DF & AB à DE, il s'ensuit par 19, 1, que les Angles ZAC, QDF sont égaux, comme aussi, par la même, les Angles BAO, XDE; par conséquent les trois Angles ZAC, CAB, BAO, étant égaux à deux Droits, aussi bien que les trois QDF, FDE, XDE, il est évident que si de part & d'autre on retranche les égaux ZAC, QDF. BAO, XDE, les restans A, D seront aussi égaux; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION IX.

PROBLEME.

A Baïſſer du Point donné E une Perpen-22 *fig.*
diculaire au Plan Z.

PREPARATION.

Prénés de ce Point donné E, d'une ouverture quelconque EA, trois Points A, B, C dans ce Plan Z, par lesquels vous ferés paſſer la circonſerence d'un Cercle, par 5, 4, au Centre duquel vous tirerés de ce Point E la Ligne EA, qui par 3, fera Perpendiculaire au Plan Z; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PRO-



PROPOSITION X.

P R O B L E M E.

21 *fig.* **T**irer du Point donné B, sur le Plan X,
une Perpendiculaire à ce Plan.

PREPARATION.

Abaissés, par la Précéd., du Point C pris hors de ce Plan la Perpendiculaire CA, & tirés, par le Lemme de la Prop. 16, du Liv. 1., par le Point donné B, la Droite DB Parallelement à CA qui par 7 sera Perpendiculaire au Plan X; ce qu'il falloit faire & démontrer.



PROPOSITION XI.

T H E O R E M E.

26 *fig.* **D**Es Points A, D, on ne peut ni élever
ni abaisser deux Perpendiculaires com-
me AB, AC. DE, DF.

DE-

DEMONSTRATION.

Car si les Lignes AB, AC étoient Perpendiculaires, il s'ensuivroit que les Angles BAE, CAE seroient egaux, ce qui seroit absurde, donc &c.

DEMONSTRATION.

Parce que l'Angle AED est, par le Coroll. 1. de la Prop. 16 du Liv. 1, plus grand que l'Angle EFD, il s'ensuit que la Droite DE n'est pas une Perpendiculaire & qu'enfin il n'y en peut avoir que l'unique DF; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XII.

THEOREME.

Si la Ligne AB est Perpendiculaire aux Plans Z, X, je dis que ces deux Plans sont Paralleles. 25 fig.

DEMONSTRATION.

Car si des Points B, A, vous décrivez les Cercles A, B, vous connoîtrez aisément
Q

ment par Défin. 4, que le Centre ou Point B, est également éloigné de ceux de la circonférence du Cercle A, comme aussi le Centre A de ceux de la circonférence du Cercle B, & qu'ainsi ces deux Cercles B, A sont Paralleles, comme aussi par conséquent les Plans Z, X; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIII.

T H E O R E M E

Plan-
che 3
28 fig.

SI les Lignes MN, NL qui se coupent au Point N, sont Paralleles aux Lignes YC, CD qui se coupent en C, je dis que les Plans A, B, de ces Lignes, le sont aussi.

P R E P A R A T I O N.

Du Point N, tirés par 9. la Droite NE Perpendiculairement au Plan B, & tirés Parallelement aux Droites CY, CD, les Lignes EG, EF qui, par 22, 1, seront Paralleles aux Lignes, MN, NL.

DEMONSTRATION.

Parce que la Ligne NE est Perpendiculaire au Plan B, il s'ensuit que l'Angle NEF est Droit, & par 21, 1, que l'Angle LNE l'est aussi, à cause que LN, EF sont Paralleles; par consequent les Plans A, FG l'étant de même par la précéd., il s'ensuit évidemment que les Plans A, B le sont aussi, à cause du Plan FG qui est partie du Plan B; ce qu'il falloit démontrer.



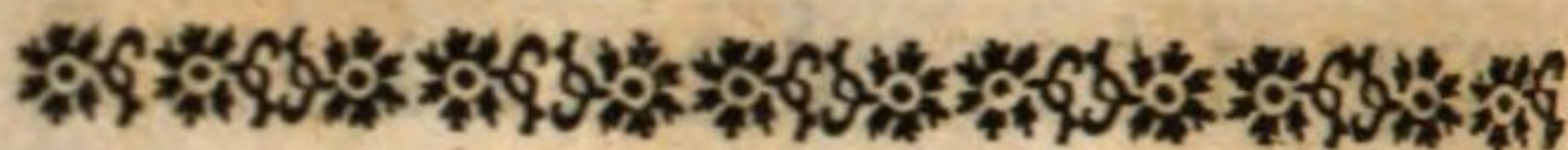
PROPOSITION XIV.

THEOREME.

LE Plan CB qui coupe les Paralleles FE, HG, fait à ces derniers les Sections CA, DB aussi Paralleles. ^{29 fig.}

DEMONSTRATION.

Car ces Plans EF, GH étant Paralleles par supp., on connoît par Défin. 10, que ces Lignes ou Sections CA, DB le sont aussi parce que par Prop. 1, ces Lignes ou Sections sont dans ces Plans; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XV.

T H E O R E M E

Plan-
che 2
27 fig.

SI les Plans KY, FE, GH sont Paralleles, je dis qu'ils coupent les Lignes AB, CD Proportionnellement.

P R E P A R A T I O N .

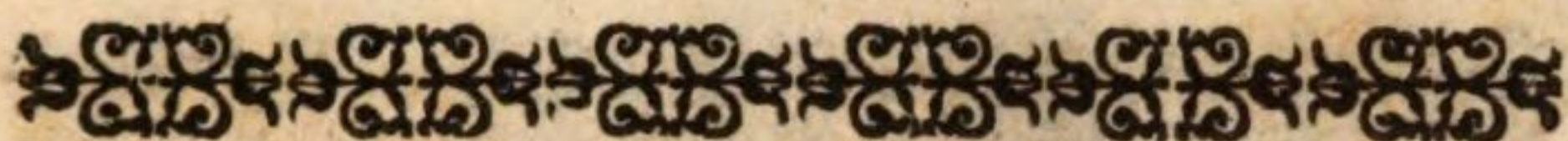
Tirés AD.

D E M O N S T R A T I O N .

Parce que les Sections de ces Plans sont Paralleles par la précédente il s'ensuit évidemment par 2, 6, que la raison de AU à UB, est égale à celle de AO à OD, & que celle de AO à OD, est égale à celle de CN à ND, & par égalité, que celle de AU à UB, est égale à celle de CN à ND; ce qu'il falloit démontrer.



PRO-



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

SI la Ligne AB est Perpendiculaire au *plan-*
Plan DG, je dis que les Plans FE, HY, *che 3*
dans lesquels cette Perpendiculaire se trou- *30 fig.*
ve, le sont aussi à ce Plan DG.

DEMONSTRATION.

Car cette Perpendiculaire AB étant, par
Supp., dans les Plans FE, HY, on con-
clut évidemment que, puisque par la pen-
sée on peut la faire mouvoir Perpendicu-
lairement le long de ces Plans, ils sont Per-
pendiculaires au Plan DG; ce qu'il falloit
démontrer.





PROPOSITION XVII.

T H E O R E M E.

*même
fig.*

SI les Plans FE, HY sont Perpendiculaires au Plan DG, leur commune Section BA la sera aussi à ce Plan DG.

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident que cette Section AB est une Ligne Droite par 2, & que si par la pensée, on élève le Plan DG jusqu'en A de manière que les Plans FE, HY lui restent Perpendiculaires; le Point B rencontrera le Point A, de sorte qu'en ce cas, la Section AB est Perpendiculaire au Plan DG; car si elle ne la lui étoit pas, il ne se pourroit qu'après les Supp., que j'ai faites, le Point B rencontrât le Point A, ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

LA Somme de deux Angles quelcon- 32 *fig.*
ques, des trois Angles Plans AOC,
AOB, BOC qui comprennent l'Angle Solide
O, est plus grande que le Troisième Angle.

Si ces trois Angles Plans étoient égaux,
la chose seroit évidente; si l'Angle COA
est le plus grand des Trois, je dis donc que
la Somme des deux autres COB, BOA,
est plus grande que cet Angle COA.

PREPARATION.

Faites l'Angle AOD égal à l'Angle AOB,
coupés OD égale à OB, & tirés les Droites
ADC, AB, BC.

DEMONSTRATION.

Parce que l'Angle AOD est, par constr.,
égal à l'Angle AOB, & le côté OD au côté
OB, il s'ensuit par 4, 1, que les Triangles
AOD, AOB sont égaux en tout sens,
à cause du côté OA qui leur est commun;
par conséquent AB est égal à AD, or AB

Q 4

plus

plus BC étant plus grande que AC par 6, 1, on conclut évidemment qu'ôtant choses égales AB, AD, le reste BC est plus grand que le reste CD, & que, le côté BO étant égale à OD & OC commun, l'Angle BOC est, par le Coroll. 3. de la Prop. 17, du Liv. 1, plus grand que l'Angle COD, & qu'enfin l'Angle AOB étant égal à l'Angle AOD, & l'Angle BOC, plus grand que l'Angle COD, la Somme des deux Angles AOB, BOC est aussi plus grande que la Somme des deux AOD, COD ou par égalité, que le seul ou le Tôtal COA; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIX.

T H E O R E M E.

31 *fig.* **L**A Somme des Angles Plans AOC, AOB, BOD, &c. qui comprennent l'Angle Solide O est moindre que quatre Droits.

DEMONSTRATION.

Car si on décrit du sommet, O de cette Angle Solide, le Cercle Z, on connoitra aisément que si ces Angles Plans étoient dans ce Cercle, ils seroient, pris ensemble, égaux

égaux à quatre Angles Droits, mais qu'étant élevez au dessus de ce Cercle, ils sont moindres que quatre Droits par 18, 1; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XX.

THEOREME.

SI le Solide, AG est terminé par des ^{33 fig.} Plans Paralleles de quatre côtés, je dis que les opposez sont des Parallelogrammes Semblables & égaux.

DEMONSTRATION.

Parce que le Plan de derriere EB, est, par l'Hypothese, Parallele au Plan CH, il s'en suit par 14 que les Sections AB, DC, faites par le Plan DB, le sont aussi, & par les mêmes raisons, que les Sections AD, BC le sont de même, & par la Défin. 21 du Liv. 1., que le Plan CABD est un Romboïde aussi appelé Parallelogramme, & par les mêmes raisons, que les autres Plans sont aussi des Parallelogrammes; ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à prouver que les opposés sont Semblables & égaux.

DEMONSTRATION.

Parce que les Lignes AD, DC sont Paralleles & égales aux Lignes EH, HG par la première partie, on conclut évidemment par 8, que les Angles ADC, EHG le sont aussi, & que raisonnant de même, les côtez Homologues des Parallelogrammes BD, HF sont égaux comme aussi les Angles compris entre ces côtez, de sorte donc que si par la pensée on pose les Plans DB, HF l'un sur l'autre, ils conviendront, aussi bien, par les mêmes raisons, que les opposez HA, GB &c.; ce qui restoit à démontrer.





PROPOSITION XXI.

THEOREME.

SI on divise le Parallelepipedes HD par le Plan GC, que je suppose être Paralleles aux opposés HB, FD, je dis que les Solides HC, GD qui en resultent, sont en même raison que leurs bâses XG, GE. 34 fig.

DEMONSTRATION.

Parce que l'on peut concevoir le Parallelepipedes HD, fait par un mouvement Perpendiculaire du Plan HB, aux Lignes HF, XE, il s'ensuit que tous les Plans, qui composent ce Parallelepipedes, sont Paralleles & égaux en tout sens, desorte que si par la pensée on fait entrer le Parallelepipedes GD, dans HC, il sera aisé de conclure que HK est le même que GD, & que HC excède autant le Parallelepipedes imaginaire HK, ou par égalité le Réel GD, que la bâse XG excède la bâse XY, ou par égalité, la bâse GE, & que par consequent le Parallelepipedes HC, est au Parallelepipedes GD, comme la bâse XG à la bâse GE; ce qu'il falloit démontrer.

CO-

COROLLAIRES.

I.

D'où il suit que les Parallelepipèdes de mêmes hauteurs, sont en même raison que leurs bâses.

I I.

Et que les Parallelepipèdes de mêmes hauteurs & de bâses égales, sont égaux.

I I I.

35 *fig.* Et qu'enfin si on coupe le Prisme DACE, par un Plan, comme par le Ponctué H que je suppose Parallele aux opposez AFC, GDE, ce Plan ou Section, est Semblable & égal à chacun des Plans opposez &c.





PROPOSITION XXII.

THEOREME.

LE Parallelepipede AB est divisé en deux *même* également par le Plan Diagonal CFDE *fig.*
ou en deux Prismes égaux.

DEMONSTRATION.

Car tous les Plans qui composent ce Parallelepipede sont, par la précéd., Semblables & égaux entr'eux & ils sont, par 25, 1, divisez en deux également par le Plan Diagonal DC, aussi bien, par égalité, que la Parallelepipede AB qui comme il est évident, est divisé en deux Prismes égaux DAE, DHE; ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

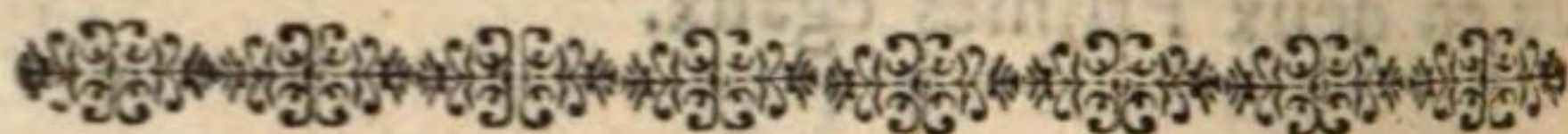
Les Cûbes sont en Raison Triplée de celle de leurs côtés.

Car outre que leur Solidité dépend de leurs trois dimensions par la Remarque de la Défin. 3., la raison de l'un à l'autre est
com-

composée de celle de leurs trois dimensions par la suite de la Définition. 15. du Liv. 5, & les raisons de leurs dimensions sont égales par la Définition. 11.; d'où il s'ensuit que les Cubes sont entr'eux, en Raison Triplée de celle de leurs côtés par la suite de la Définition. 16. du Liv. 5 &c.

Il suit évidemment de ce Lemme, que les Cubes Rombes ou Losanges, sont aussi en raison Triplée de celle des leurs côtes.

J'entens par Cûbe Rombe ou Losange, un Solide borné par six Rombes.



PROPOSITION XXIII.

T H E O R E M E.

Plan-
che 3
36 &
37 fig.

LES Parallelepipèdes Semblables CO, GN, sont en Raison Triplée de celle de leurs côtés Homologues CD, GH ou CA, GF &c.

DEMONSTRATION

Parce que leur Solidité dépend aussi de leurs trois dimensions par la Remarque de la Définition. 3, & que ces Parallelepipèdes sont mêmes parties de Cubes s'ils sont Rectangles ou de Cubes Rombes s'ils ne le sont pas, on conclut évidemment par le Lemme

me précédent & par le 2. Principe du Liv. 6, que le Parallelepipedé CO est au Parallelepipedé GN, en Raison Triplée de celle de CD à GH, ou par égalité de celle de CA à GF &c. ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

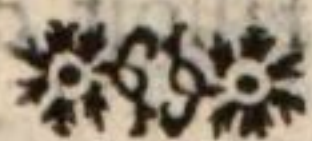
I.

Il suit de ce Theoreme que les Solides Semblables, sont en même raison que les Cûbes de leurs côtés Homologues, parceque les Cûbes sont en Raison Triplée de celle de leurs côtés par le Lemme précédent.

II.

Et qu'enfin si les quatres Lignes A, B, C, D, sont continuellement Proportionnelles, le Parallelepipedé décrit sur la Première sera au Parallelepipedé Semblable décrit sur la Seconde, comme la première Ligne à la Quatrième; Car la raison de la Première à la Quatrième est, par la suite de la Définition 16 du Liv. 5, Triplée de celle de la Première à la Seconde.

Planche 4
41 fig.



PRO.



PROPOSITION XXIV.

T H E O R E M E.

Plan-
che 3
38 fig.

SI les Parallelepipèdes X, Z sont égaux je dis qu'ils ont les bâses, C, E, & les Hauteurs, A, B, Réciproques.

Et que s'ils ont les bâses & Hauteurs Réciproques, ils sont égaux.

DEMONSTRATION.

Si par exemple la Hauteur A, est égale au tiers de la Hauteur B, en compensation la bâse C doit être Triple de la bâse E pour qu'étant multipliée par la Hauteur A, elle produise, par la Remarque de la Définition. 3, le Parallelepipède X égal au Parallelepipède Z produit de sa bâse E multipliée par la Hauteur B; par conséquent la bâse C ou 12 étant à la bâse E ou 4, comme la Hauteur B ou 9 à la Hauteur A ou 3 par la 2^e partie de la Proposition. 11, du Liv. 6, il s'ensuit par la Définition. 2 du même Livre, que les bâses C, E & Hauteurs A, B sont Réciproques; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que par l'Hypothese & la Défin. 2 du Liv. 6, la raison de C à E, est égale à celle de B à A, il s'ensuit par la 1. partie de la Prop. 11 du même Liv., que le produit des extrêmes est égal au produit des moyennes, & par égalité, que le Parallelepipedé X, fait de la Bâse C, multipliée par la Hauteur A, est égal au Parallelepipedé Z, fait ou produit de la Bâse E multipliée par la Hauteur B; ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRES.

I.

Il suit de ce Theoreme que les Prismes Triangulaires, qui ont les Hauteurs & Bâses Réciproques, sont égaux, & qu'étant égaux, ils ont les Hauteurs & Bâses Réciproques.

Car ces Prismes sont, par 22, moitiés des Parallelepipedes.

II.

J'ajoute que les Prismes Poligones, qui ont les Hauteurs & Bâses Réciproques, sont égaux, & que s'ils sont égaux, ils ont les Hauteurs & Bâses Réciproques.

Car étant très évident que leur Solidité dépend aussi de la multiplication de leur

R

bâse

bâse par leur Hauteur, on conclut évidemment par la précédente qu'ayant &c.

L E M M E.

Si les Quantités A , B , C ou Nombres 2, 4, 8, sont continuellement Proportionnels, le produit de A multiplié par C , sera, par 12, 6, égal au produit de B multiplié par lui même, & multipliant ces deux produits égaux par la même Quantité B , c'est-à-dire 16, 16, par le même nombre 4, il est évident que les produits 64, 64 seront égaux.





PROPOSITION XXV.

THEOREME.

SI les Lignes A, B, C sont continuelle-*Plan-*
ment Proportionnelles, je dis que le *che 4.*
Parallelepipede O, fait de cestrois Lignes, 39 *e*
est égal au Parallelepipede Equiangle V, fait 40. *fig.*
de la Moïenne.

De sorte qu'ainfi ses trois dimensions sont
égales à cette Moïenne.

DEMONSTRATION.

Car multipliant A par C, on a la bāse
X qui est égale, par 12, 6, à la bāse Z
produite de la Ligne B multipliée par elle
même, & multipliant choses égales, c'est-
à-dire ces bāses X, Z, par la même Quan-
tité B, on a, par le Lemme précédent, le
Parallelepipede O, fait des trois Lignes A,
C, B, égal aux Parallelepipede V fait de
la Moïenne B; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXVI.

T H E O R E M E.

44 *fig.* **S**I les Lignes A, B, C, D sont Proportionnelles, je dis que les Solides Semblables, décrits sur ces Lignes, le sont aussi.

Et que, si ces Solides Semblables sont Proportionnels, ces Lignes A, B, C, D le sont de même.

DEMONSTRATION.

Car on connoitra aisément par 23, que le Parallelepipedé décrit sur la première est au Parallelepipedé Semblable décrit sur la seconde en raison Triplée de celle de la première Ligne à la Seconde, & que le Parallelepipedé décrit sur la Troisième est au Parallelepipedé Semblable décrit sur la Quatrième en raison Triplée de celle de la Troisième à la Quatrième ou par égalité, de celle de la Première à la Seconde, & par la Défin. 7 du Liv. 5, que ces Quatre Solides sont Proportionnels; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Outre que ces Parallelepipèdes sont Proportionnels par l'Hypoth., la raison du Premier au Second, est Triplée de celle de la première Ligne à la seconde, & la raison du Troisième au Quatrième, de celle de la troisième Ligne à la Quatrième & les exposans de ces raisons Triplées sont égaux entr'eux par la Déf. 7 du Liv. 5, & par la même Définition, ces Lignes A, B, C, D sont Proportionnelles; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

LE Prisme KF; qui a pour bête le Paralelogramme YLKG double de la bête Triangulaire MDE, du Prisme MBC de même hauteur que ce Prisme KF; est égal à ce Prisme Triangulaire.

42 &
43 fig.

DEMONSTRATION.

Car si on acheve les Parallelepipèdes YN, MBQ, on connoitra aisément par 22, que

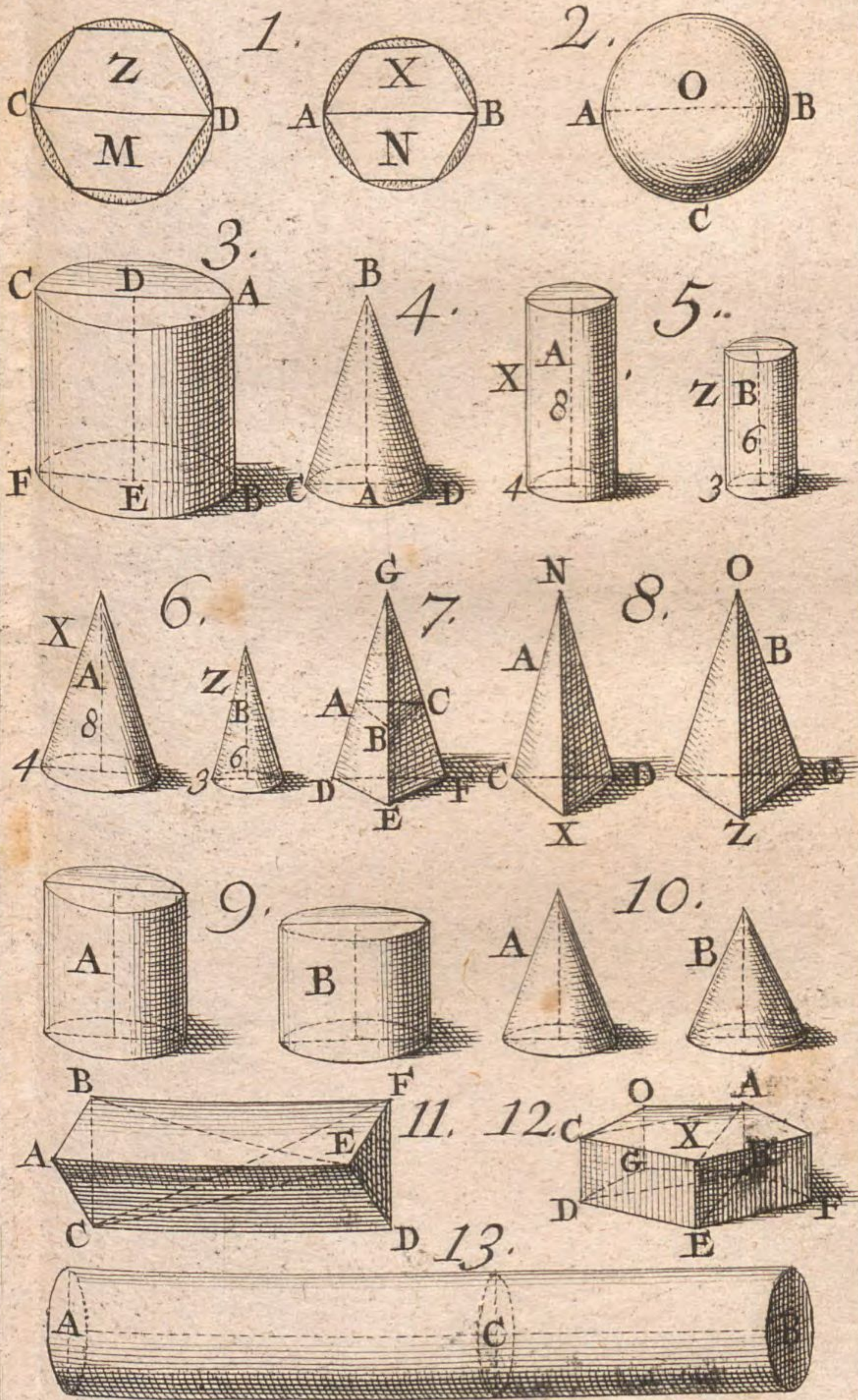
R 3

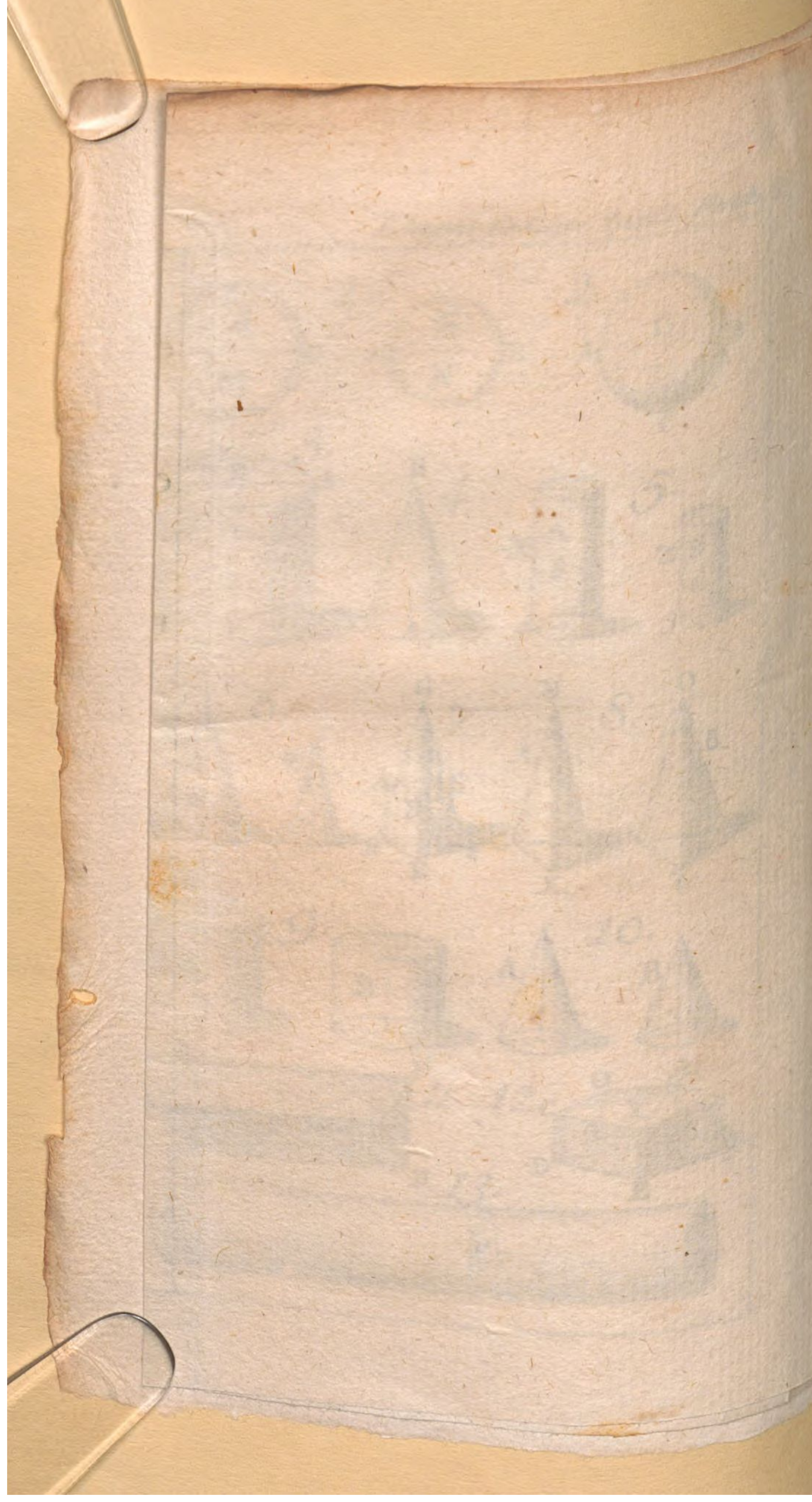
ces

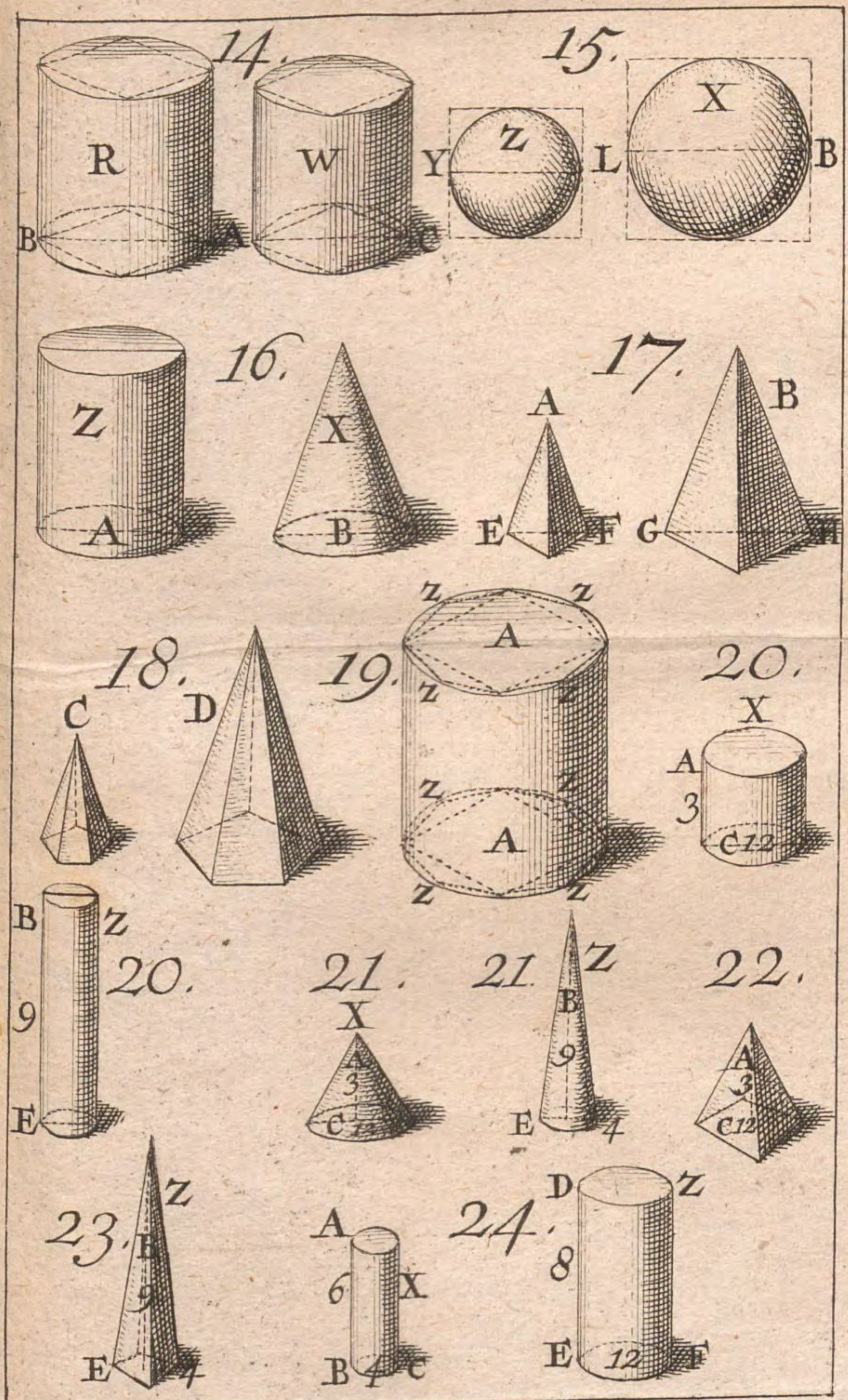
ces Prismes en sont les moitez, & par le Coroll. 2 de la Prop. 21, que ces Parallelepipedes sont égaux, & par égalité, que leur moitié ou Prismes KF, MBC le sont aussi; ce qu'il falloit démontrer.

Fin du Livre onzième.











ELEMENTS

DE

GEOMETRIE,

OU

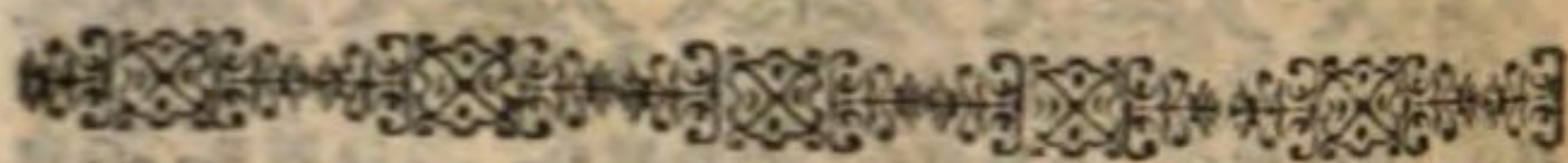
DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE DOUZIEME



UCLIDE nous ayant expliqué dans le Livre précédent les Propriétés des Corps terminez par des Surfaces Planes, son dessein dans celui-ci est de nous expliquer les Propriétés de Ceux terminez par des Surfaces Courbes; comme est le Cône, le Cilindre & la Sphere, sur lesquels de très Savans Mathematiciens, & particulièrement

le grand Archymede, nous ont fait part de très belles Démonstrations.



DEFINITIONS

I.

*Plan-
che I
4 fig.*

SI par la pensée, on fait tourner le Triangle Rectangle ABC au tour de son côté immobile AB, il est évident que, par sa circonvolution entière, il produira un Solide, dont la forme, sera comme celle d'un pain de sucre qu'on appelle Cône en Geométrie.

II.

*même
fig.*

Ce côté AB, au tour duquel tourne le Triangle Rectangle ABC, est appelé l'Effieu ou l'Axe de ce Cône dont la Bâse est le Cercle A produit par le mouvement du Rayon AC.

III.

3 fig.

Si par la pensée, on fait tourner le Rectangle FEDC au tour de son côté immobile ED, il est évident qu'il produira, par cette circonvolution, le Solide FA, qui est appelé Cilindre.

I V.

Ce côté ED, au tour duquel tourne ce *même* Rectangle, est appelé l'Effieu ou l'Axe de *fig.* ce Cilindre dont les bâses ou Cercles E, D sont égaux par la Déf. 1. du Liv. 3. puisqu'ils sont produits par le mouvement des Rayons ou côtez égaux FE, CD de ce Rectangle.

Autre Définition.

Si par la pensée on élève le Cercle FB, *même* auquel l'Axe ED est Perpendiculaire, jus- *fig.* qu'en D, il est encore évident que par ce mouvement qu'on suppose Parallele, il décrira le Solide FA, qui vient d'être appelé Cilindre, & que le Point ou Centre E, décrira l'Axe ED &c.

On conclut évidemment de cette définition, que tout Solide, dont les bâses sont Paralleles & égales en tous sens, & les autres Plans Parallelogrammes, peut être considéré, produit par un mouvement régulier d'une de ses bâses; comme le Cube, le Parallelepipede, le Prisme Triangulaire, Quadrangulaire & Poligone.

V.

On dit que des Cilindres & Cônes sont 3 & 4 Droits lorsque leur Axe ED, AB, est Per- *fig.*

R 5

pen-

pendiculaire à leur bâte, si non ils sont dit Escalenes.

V I.

5 & 6
fig.

Et que des Cilindres & Cônes Droits, sont Semblables, lorsque leurs Axes sont Proportionnels aux Diametres de leurs bastes.

V I I.

Et que des Cilindres & Cônes Escalenes sont Semblables, lorsqu'outre que leurs Axes sont Semblablement inclinez sur leurs bastes, ces Axes sont Proportionnels aux Diametres de ces bastes.

mêmes
fig.

Les Cônes, & Cilindres Droits A, B seront donc Semblables, si la raison de l'Axe 8 au Diametre 4, est égale à celle de l'Axe 6 au Diametre 3.

Si ces Cilindres & Cônes A, B, avoient été Escalenes, on auroit aussi supposé que leur Axe étoient Semblablement inclinez sur leurs bastes &c,

V I I I.

2 fig.

Le Solide AB, dont la forme est comme celle d'une boule, est appelé Sphere, si les Lignes, tirées de son milieu ou Centre O, à sa Surface concave sont égales entr'elles.

même
fig.

La Sphere peut-être considérée produite par la

GEOMETRIE. LIV. XII. 267

la circonvolution entière d'un demi Cercle, comme ACB , au tour du Diamètre immobile AB ; de sorte que si par la pensée on fait tourner ce demi Cercle au tour de ce Diamètre, il produira, comme il est très évident, par sa circonvolution, ce Solide qu'on vient d'appeller *Sphere*.

I X.

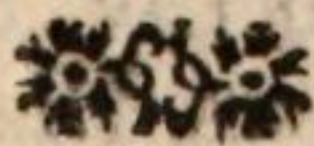
La Ligne AB au tour de laquelle, tour-*même* ne ce demi Cercle ACB est appelée l'Axe *fig.* ou l'Effieu de la Sphere,

X.

Le Centre d'une Sphere, est le milieu O de son Axe AB .

X I.

Toutes les Lignes tirées à la Surface concave de la Sphere, & qui passent par son Centre O sont nommez Diametres, qui *même fig.* sont égaux entr'eux, parce que leurs moitiés, qui sont appelées Rayons de la Sphere, le sont aussi par Défin. 8.





PROPOSITION I.

T H E O R E M E.

*Plan-
che I
1 fig.*

LEs Poligones Semblables X, Z , inscrits dans les Cercles N, M , sont en Raison doublée de celle des Diametres AB, CD de ces Cercles.

DEMONSTRATION

Parce que ces Cercles N, M sont figures Semblables & que les Poligones X, Z le sont aussi par l'Hypothese, il s'ensuit par le 2. Principe du Liv. 6, que la figure ponctuée, du Cercle M , est Semblable à la figure, ponctuée du Cercle N , à cause que ces Poligones sont mêmes parties de ces Cercles, & qu'enfin ces Poligones X, Z sont en même raison que les Cercles N, M qui étant, par le Coroll. 3 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, en Raison doublée de celle de leurs Diametres, ces Poligones le sont aussi de celle de ces mêmes Diametres; ce qu'il falloit démontrer.

LEM-

L E M M E.

Si la Section ou Plan ABC de la Pirami- 7 *fig.*
de GDEF, est Parallele à la b  se de cette
Piramide, cette Section ou Plan sera Sem-
blable à cette b  se.

DEMONSTRATION.

Car les Plans ABC, DEF   tant Paralleles
par supp., on connoît aisément par 14, 11,
que les côtez AB, DE. AC, DF le sont
aussi, & par la Prop. 8 du même Liv., que
les Angles BAC, EDF sont égaux, com-
me aussi, par les mêmes raisons, les An-
gles B, E. C, F, & qu'ainsi les Triangles
ABC, DEF sont Equiangles, & par 4, 6
qu'ils sont Semblables; ce qu'il falloit d  -
montrer.



PRO-

PROPOSITION II.

T H E O R E M E.

8 fig. **L** Es Piramides A , B de même ou égales hauteurs , sont en même raison que leurs bâses.

DEMONSTRATION.

Parce qu'on peut concevoir ces Piramides, comme composées d'un nombre infini de Plans posez les uns sur les autres, diminuant à proportion qu'ils s'approchent des sommets N, O, il est évident que, si par exemple les hauteurs de ces Piramides sont de mille Points, on pourra faire passer par la pensée autant de Plans Parallelement à leurs bâses, qui, par le Lemme précédent, seront Semblables à ces bâses, & qu'enfin, ces Piramides étant composées chacune de mille Plans, la bâse de la Piramide A sera, par 10. 5, à la bâse de la Piramide B, comme tous les Plans, qui composent la Piramide A, à tous Ceux qui composent la Piramide B, ou par égalité comme la Piramide A à la Piramide B; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

Il suit évidemment de ce Theoreme que les Piramides Poligones, Cilindres & Cônes de même ou égale hauteur sont entr'eux comme leurs bâses.

II.

Et que les Piramides, Cilindres & Cônes de même ou égale bâte & d'égale hauteur sont égaux entr'eux.

Je ne rapporte pas les Démonstrations de ces deux Coroll., parce qu'elles ne different en rien de Celle du Theorème précédent &c.

Car comme on a conçu que les Piramides étoient composées d'une infinité de Plans posez les uns sur les autres Parallelement à leurs bâses on pourra concevoir de même, que les Cilindres & Cônes le sont d'une infinité, posés les uns sur les autres Parallelement à leurs bâses & qui seront évidemment Semblables à ces bâses, & il sera aisé de conclure par la précéd., que &c.



PRO-



PROPOSITION III.

T H E O R E M E.

11 *fig.* **U**Ne Piramide Triangulaire, comme est la Piramide CDFE, est la troisième partie du Prisme Triangulaire DA de même b^{ase} FED & de même hauteur CD.

DEMONSTRATION.

Car en tirant les Diagonales CF, CE, BE qui, par 25, 1, divisent les Parallelogrammes Cbfd, CAED, ABEF en deux également, on connoitra aisément que ce Prisme est composé de trois Piramides Triangulaires CDFE, CBFE, CBAE qui sont égales entr'elles, car outre que la Première CDFE a sa b^{ase} FDC, égale à la b^{ase} BCF, de la Seconde CBFE, elle a aussi même sommet E que cette Seconde, & par conséquent même hauteur, & par le Coroll. 2 de la précéd. ces deux Piramides sont égales; ainsi il reste à prouver que la troisième Piramide CBAE, est égale à l'une de ces deux Premières, comme par exemple à la Piramide ECFB, qui est toujours la même CBFE.

DE-

DEMONSTRATION.

Il est déjà évident qu'elles ont même sommet C , & qu'ayant les bâses Triangulaires égales EFB , EBA , elles sont égales par les raisons précédentes, aussi bien que les trois Pyramides $CDFE$, $CBFE$, $CBAE$ par l'Axiom. 3. du Liv. 1, & qu'ainsi la Pyramide $CDFE$, est la troisième partie du Prisme DA de même bâse FED & de même hauteur CD ; ce qui restoit à démontrer.

J'ajoute qu'une Pyramide qui a sa bâse égale à celle du Prisme Poligone X , & qui a sa hauteur égale à la hauteur AB ou CD , de ce Prisme, est la troisième partie de ce Prisme Poligone. 12 fig.

DEMONSTRATION.

Car outre qu'il est évident que ce Prisme peut-être divisé en Prismes Triangulaires par les Plans Diagonals $CADB$, EA , ces derniers le peuvent être en Pyramides Triangulaires, dont chacune sera par la précédente le tiers de son Prisme, & dont les bâses occuperont celle du Poligone X ; de sorte donc que; ces Pyramides pris ensemble étant, par le Coroll. 1 de la Prop. 2., égales à une Pyramide Poligone qui a sa bâse égale aux leurs prises ensemble ou, par égalité à celle de ce Prisme Poligone, & même hauteur DC , cette Pyramide Poligone sera la troisième partie des trois Prismes

mes Triangulaires pris ensemble ou, par égalité du Prisme Poligone X; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

T H E O R E M E.

Plan-
che 2
17 &
18 fig.

L Es Piramides Semblables Triangulaires A, B, ou Poligones C, D, sont en Raison Triplée de celle de leurs côtés Homologues, ou sont entr'elles comme les Cûbes de leurs côtés Homologues.

DEMONSTRATION.

Parce que ces Piramides Semblables, sont mêmes parties de Parallelepipèdes Semblables, qui ont une de leurs trois dimensions égale à l'une de ces Piramides, on conclut évidemment par 23, 11. & par le 2 Principe du Liv. 6, que ces Piramides sont en Raison Triplée de celle de leurs côtés Homologues ou, par le Coroll. 1. de la Prop. 23 du Liv. 11, qu'elles sont entr'elles comme les Cûbes de leurs côtés Homologues; ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Les Cilindres & Cônes peuvent être con-
siderez comme des Prismes & Piramides Po-
ligones bornez par un infinité de faces. 19 fig.

Car si par la pensée on inscrit dans le Ci-
lindre vuide ZZZZ un Parallelepipedé A, il
est évident qu'on pourra y inscrire de la
même maniere un plus grand, comme est
par exemple le Prisme Poligone ZZZZ qui
approche plus de l'égalité du Cilindre que
le Parallelepipedé A, & qu'enfin conti-
nuant d'inscrire dans ce Cilindre des Prismes
Poligones de la même façon, il sera aisé d'y
en concevoir un qui étant borné par une infi-
nité de faces, nous fera conclure que, sa
différence d'avec ce Cilindre n'étant point
sensible, il sera, par égalité, ce Cilindre
même, ce qui suffit.

On connoîtra de la même maniere que
les Cônes peuvent être considerez comme
des Piramides Poligones bornées d'une infi-
nité de faces.





PROPOSITION V.

T H E O R E M E.

16 *fig.* **L**E Cône X est la troisiéme partie du Cilindre Z, de même bâte & de même hauteur.

DEMONSTRATION.

Car si on considere ce Cilindre comme un Prisme Poligone borné par une infinité de faces, & ce Cône comme une Piramide Poligone bornée par une infinité de faces, on connoitra aisément par la suite de la Prop. 3, que cette Piramide d'une infinité de faces est la troisiéme partie de ce Prisme Poligone d'une infinité de faces, & par égalité, que ce Cône, est la troisiéme partie de ce Cilindre; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION VI.

THEOREME.

SI le Cilindre AB, est coupé par le Plan *plan-*
C que je suppose Parallele à sa bâte *Ache* 1
ou B, je dis que les parties ou Cilindres *13 fig.*
AC, CB qui en resultent, sont en même
raison que les parties de l'Axe de ce Cilin-
dre AB; en sorte que le Cilindre AC est
au Cilindre CB, comme l'Axe AC à l'Axe
CB.

DEMONSTRATION.

Parce que le Cilindre AB peut être con-
sideré comme produit par un mouvement
Parallele du Cercle A par la suite de la Dé-
fin. 4., on conclud évidemment que tous
les Cercles qui composent le Cilindre AC,
sont à tous les Cercles, qui composent le
Cilindre CB, comme tous les Points qui
composent l'Axe CA à tous ceux qui compo-
sent l'Axe CB, & par égalité, que le Cilindre
AC est au Cilindre CB, comme l'Axe AC
à l'Axe CB; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de ce Theoreme & de la Prop. 5.
que les Cilindres & Cônes de mêmes ou
égales bâses sont en même raison que leur
hauteur &c.



PROPOSITION VII.

THEOREME.

*Plan-
che 2
34 fig.*

LEs Cilindres Semblables R, W sont en
Raison Triplée de celle des Diametres
BA, AC de leurs bâses.

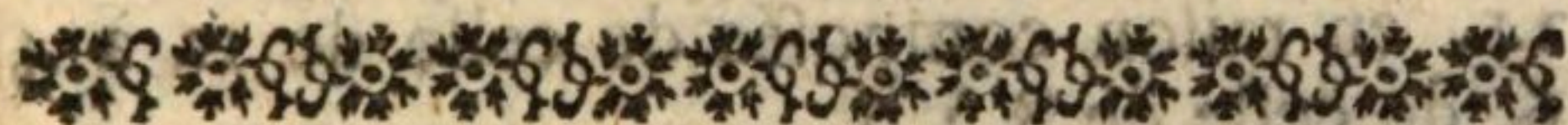
DEMONSTRATION.

Car si par la pensée on y inscrit des Prismes Quadrangulaires, on connoitra évidemment que ces Prismes sont aussi Semblables, à cause qu'ils ont mêmes hauteurs que ces Cilindres, & par 23, 11 qu'ils sont en raison Triplée de celle de leurs côtés Homologues ou, par égalité de celle de BA à AC, & par le premier Principe du Liv. 6, que leur ajoutant choses Semblables c'est-à-dire l'excès des Cilindres sur eux, les Solides ou Cilindres R, W qui en resultent sont en même

même raison que ces Prismes, c'est-à-dire, en raison Triplée de celle des Diametres de leurs bāses; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de ce Theoreme, que *plan-* les Cônes Semblables X, Z, sont en rai-*che 1* son Triplée de celle des Diametres de leurs *6 fig.* bāses, car outre qu'ils sont, par 5, la troi-
sième partie des Cilindres, ils sont mêmes parties des Cilindres Semblables, aux bāses desquels ces Diametres servent &c.



PROPOSITION VIII.

THEOREME

SI les Cilindres & Cônes X, Z sont égaux, *plan-* je dis qu'ils ont les bāses C, E, & les *che 2* hauteurs A, B, réciproques.

Et que s'ils ont les bāses & hauteurs réci-
proques ils sont égaux. *20 & 21 fig.*

Il en est de même des Piramides égales *22 &*
A, B. *23 fig.*

Voies le Lemme précéd. & le Coroll. 2
de la Prop. 24 du Liv. 11, puis la Prop. 5.
de celui-ci, & ensuite la 3 &c.

280 E L E M E N S D E S C H O L I E.

*Plan-
che 2.
24 fig.*

J'ajoute que les Cilindres Droits Z, X, sont entr'eux, en raison composée de leurs bâses & de leurs hauteurs.

Car si par exemple la bâse EF est 12 & la hauteur ED, 8, & la bâse BC, 4, & la hauteur BA, 6, on connoitra aisément par la suite de la Définition 4 & la Remarque qui suit la Définition 3. du Liv. II., que le Cilindre Z, est de 96 pieds Cubiques, & le Cilindre X de 24, & par égalité, qu'il n'est question que de prouver que 96 est à 24, en raison composée de celle de 12 à 4 & de celle de 8 à 6.

DEMONSTRATION.

Parce que l'exposant de la raison de 12 à 4 est 3, & que celui de 8 à 6 est $1\frac{1}{3}$, on conclut évidemment par les suites de la Définition 15 du Liv. 5, que la raison de 96 à 24, est égale à celle de l'exposant 4 (produit de l'exposant de 4 à 12, qui est 3, multiplié par celui de 6 à 8, qui est $1\frac{1}{3}$) à l'unité 1; de sorte donc que par égalité, on a raison de dire que ces Cilindres X, Z sont entr'eux, en raison composée de celles de leurs bâses & de leurs hauteurs &c.

On démontrera de la même manière que les Prismes sont entr'eux en raison composée de celles de leurs bâses & de leurs hauteurs. D'où il est aisé de conclure par 3, que
les

les Piramides sont entr'elles en raison composée de celles de leurs bâses & de leurs hauteurs, & par 5, que les Cônes sont entr'eux en raison composée de celles de leurs bâses & de leurs hauteurs &c.



PROPOSITION IX.

THEOREME.

L Es Spheres X, Z, sont entr'elles en raison Triplée de celle de leurs Diametres LB, YL. 15 *fig.*

DEMONSTRATION.

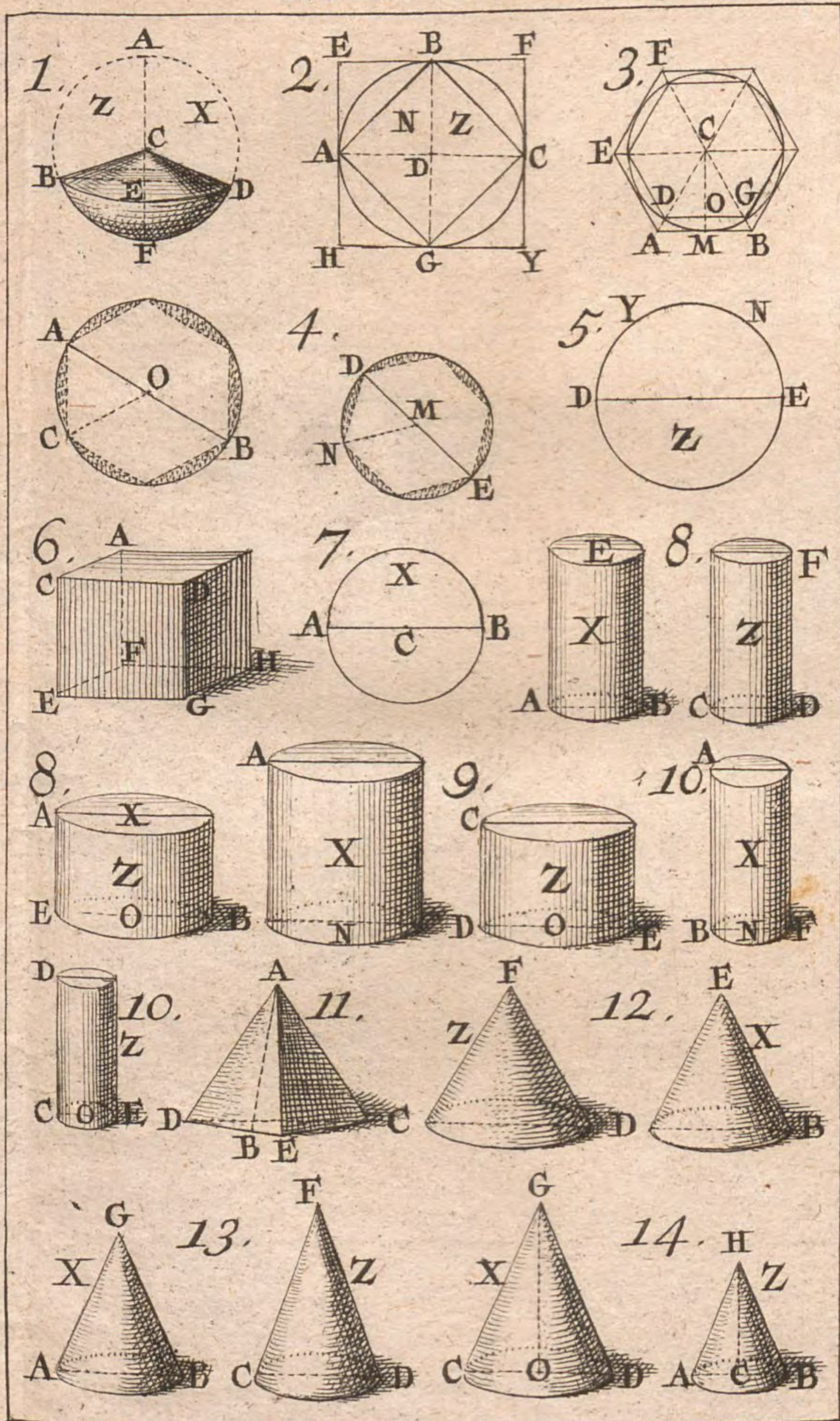
Car outre que les Spheres sont Semblables, on connoitra évidemment, en inscrivant, par la pensée, celles ci dans des Cûbes, que leurs Diametres sont égaux aux dimensions de ces Cûbes, & qu'elles touchent le milieu des six faces de ces Cûbes, & qu'elles en sont mêmes parties; & par le Lemme de la Prop. 23. du Liv. II, que ces Cûbes sont en raison Triplée de celle de leurs côtez ou, par égalité, de celle des Diametres de ces Spheres, & par le second Principe du Liv. 6, que ces Spheres le sont aussi de celle de ces mêmes Diametres LB, YL, ce qu'il falloit démontrer,

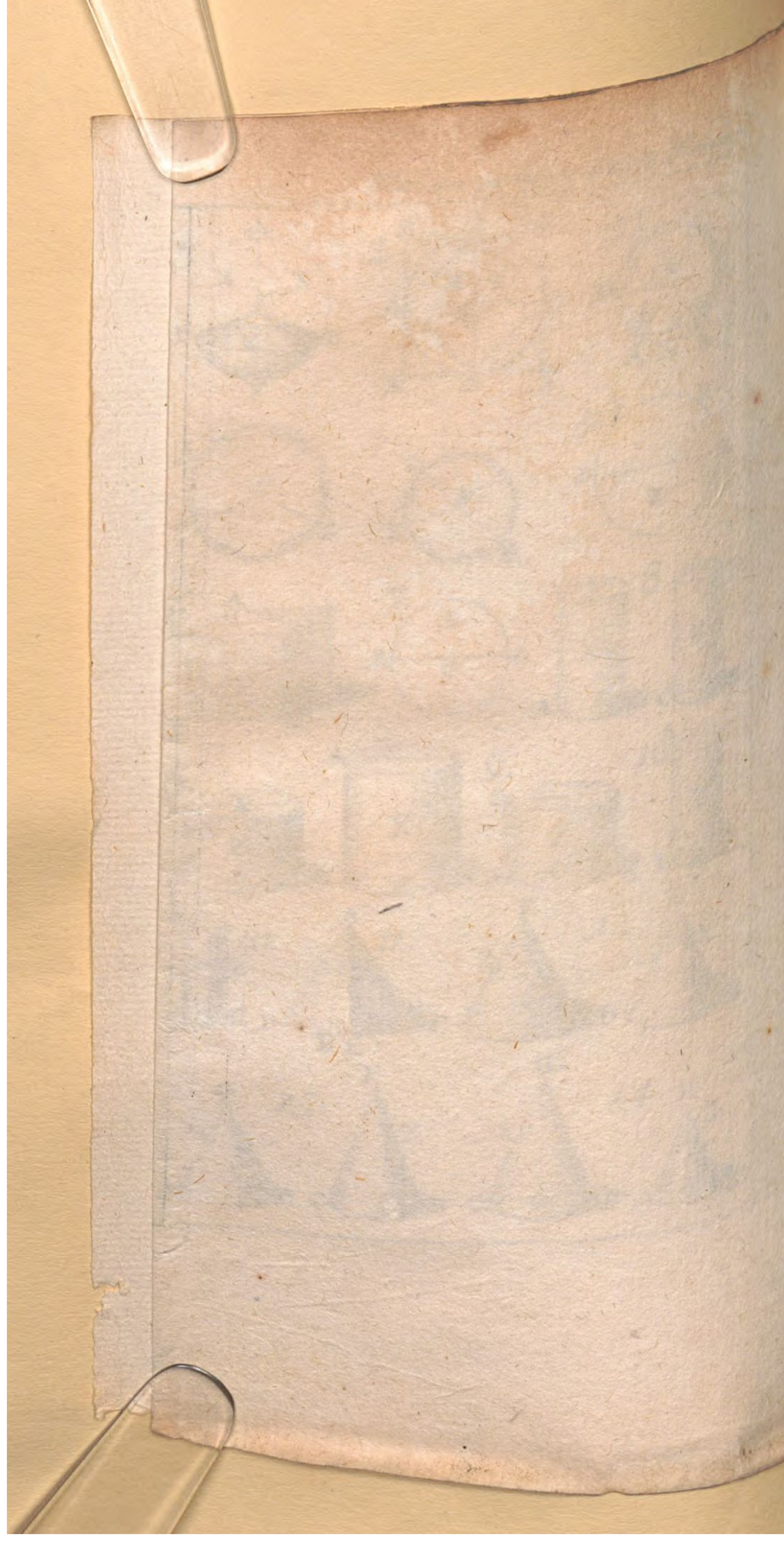
SCHOLIE.

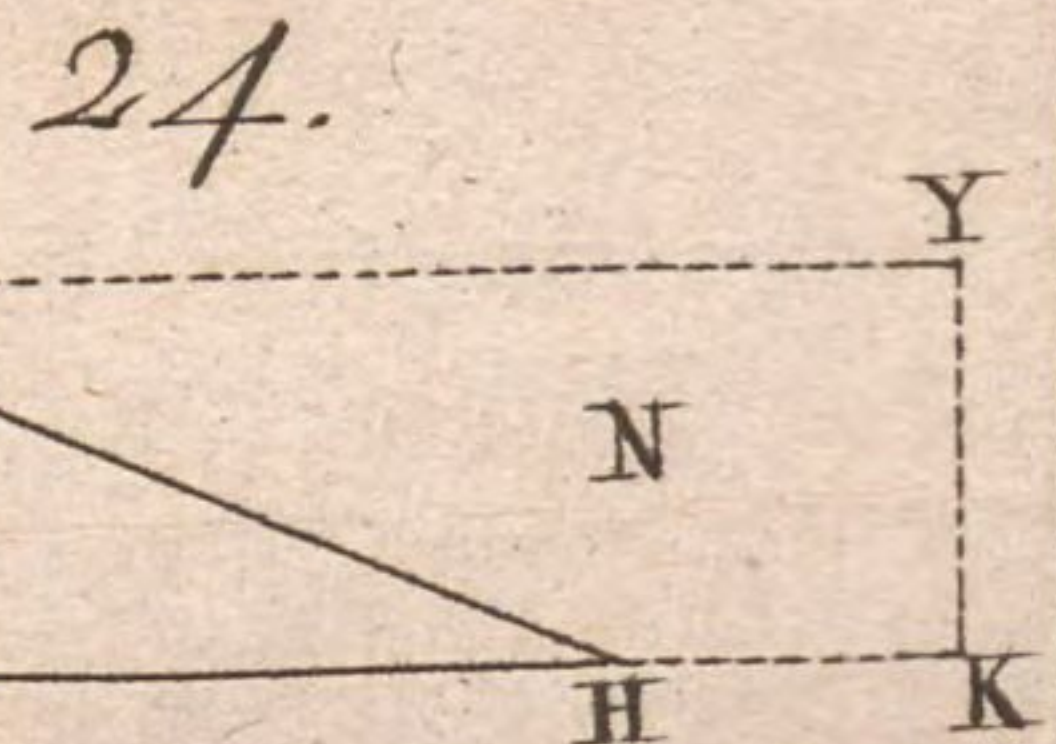
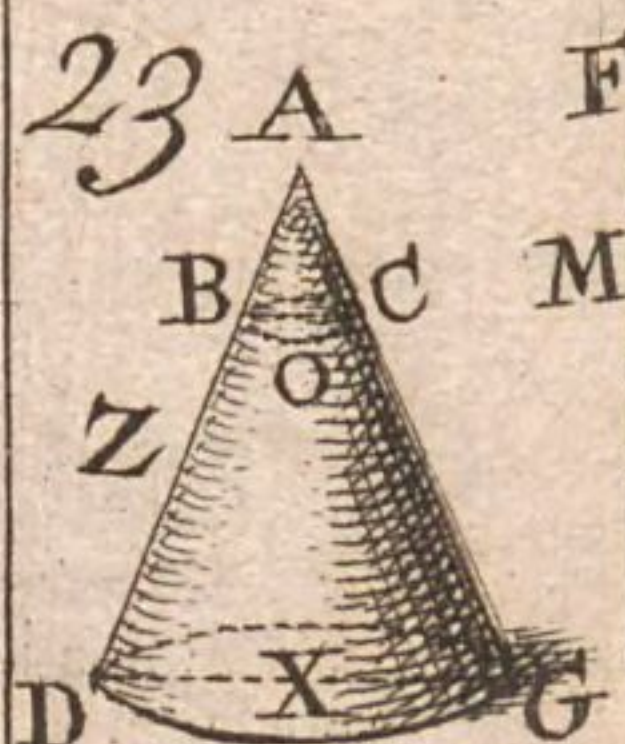
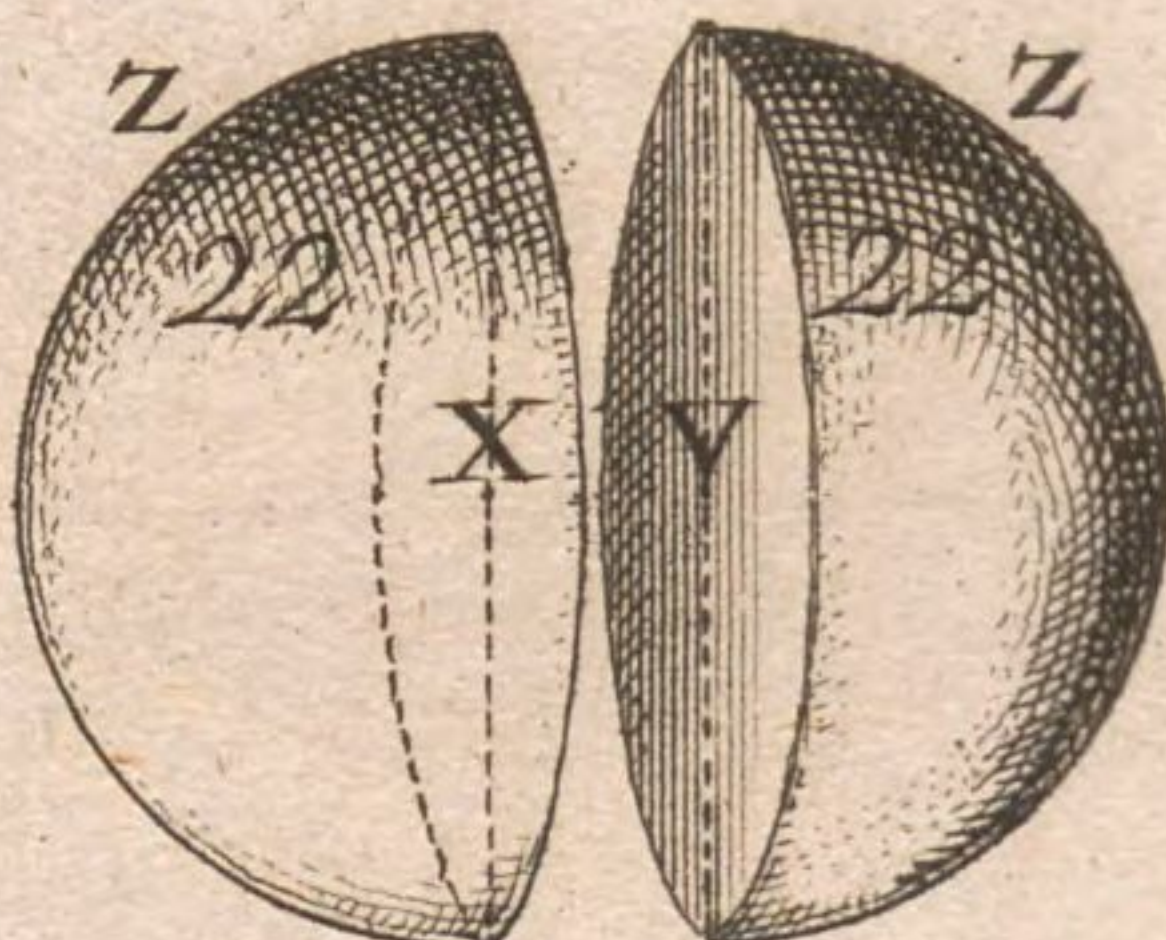
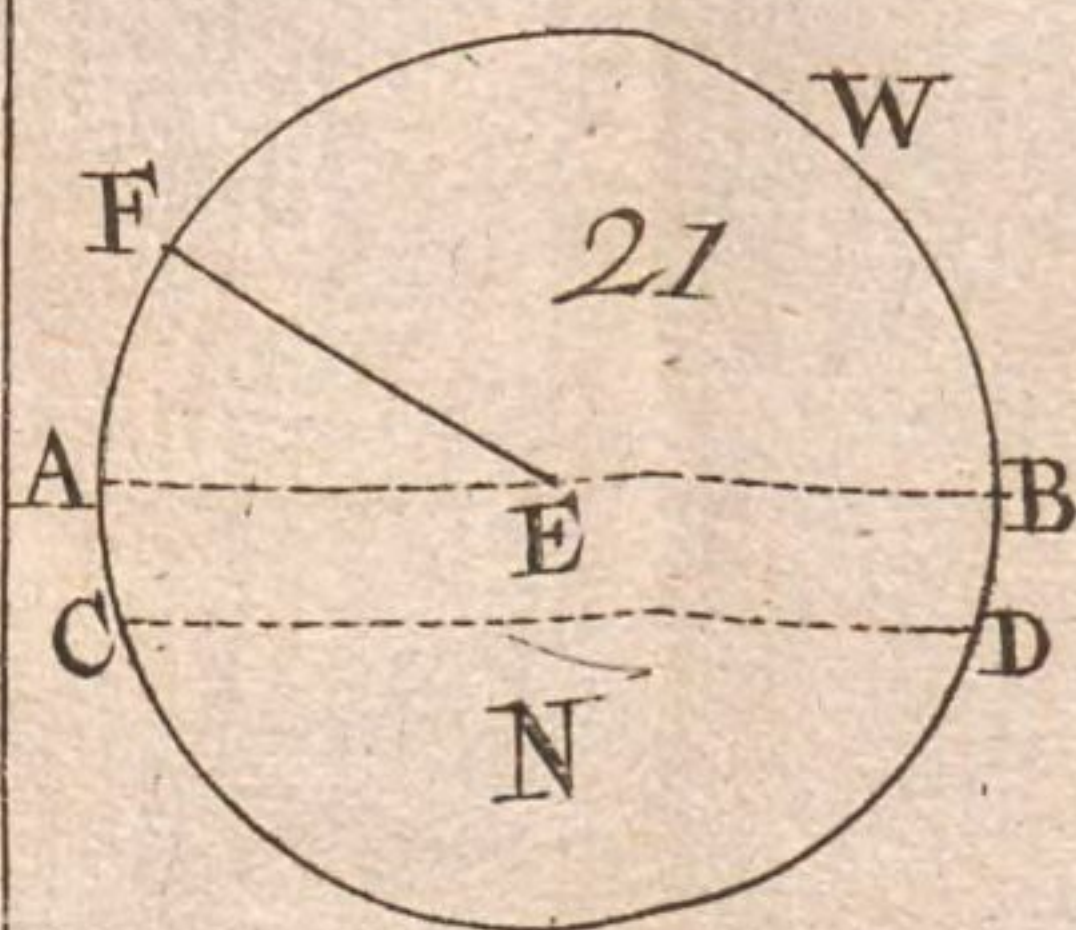
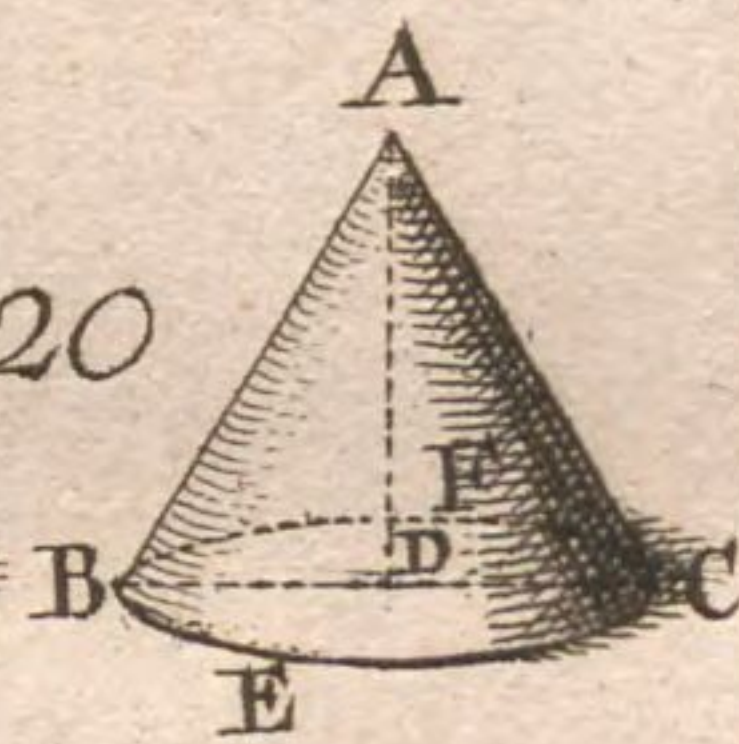
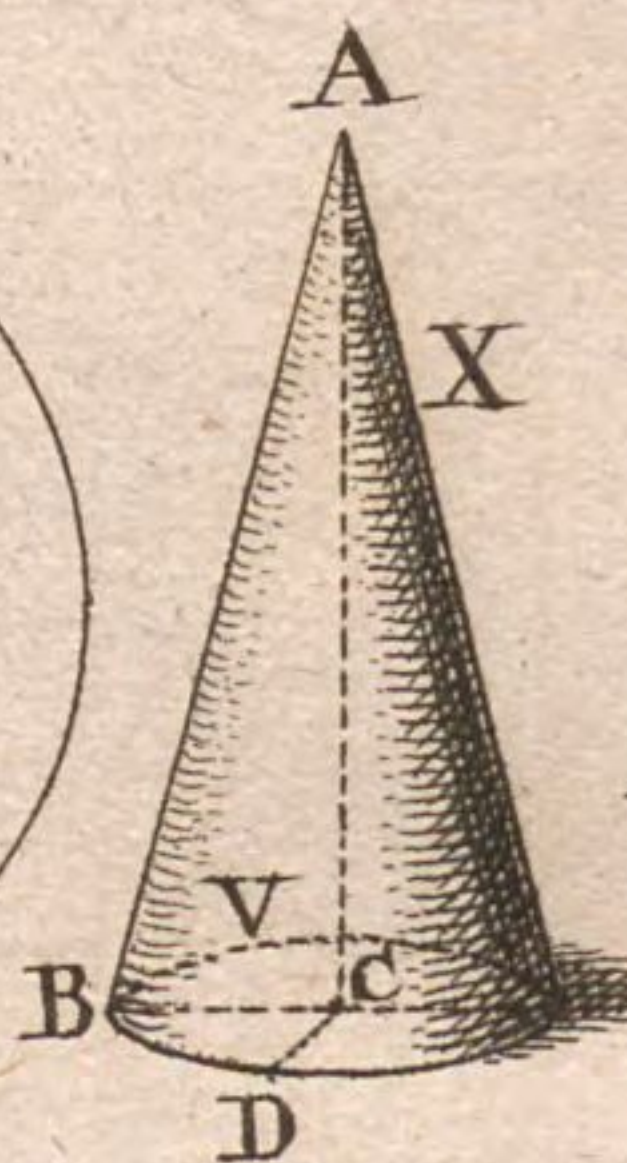
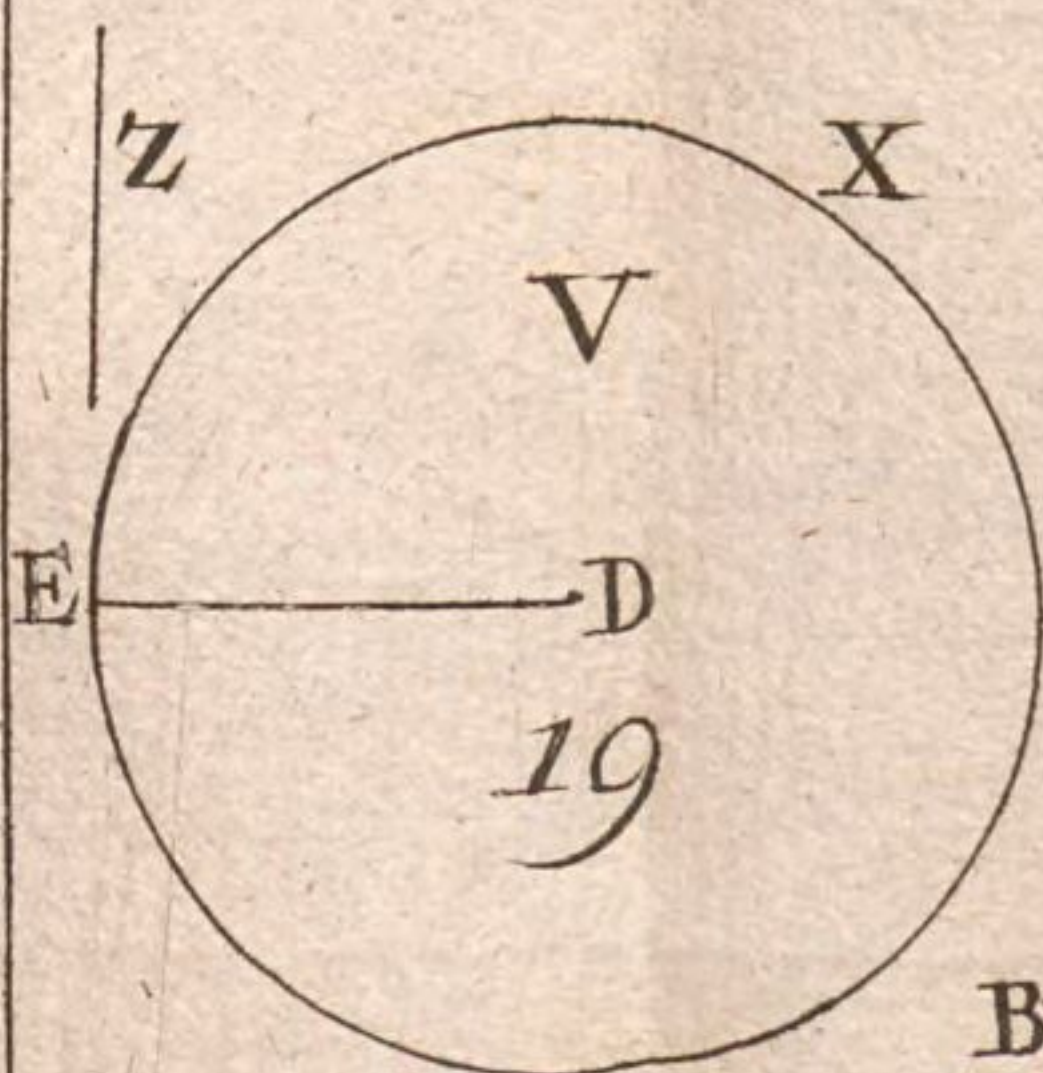
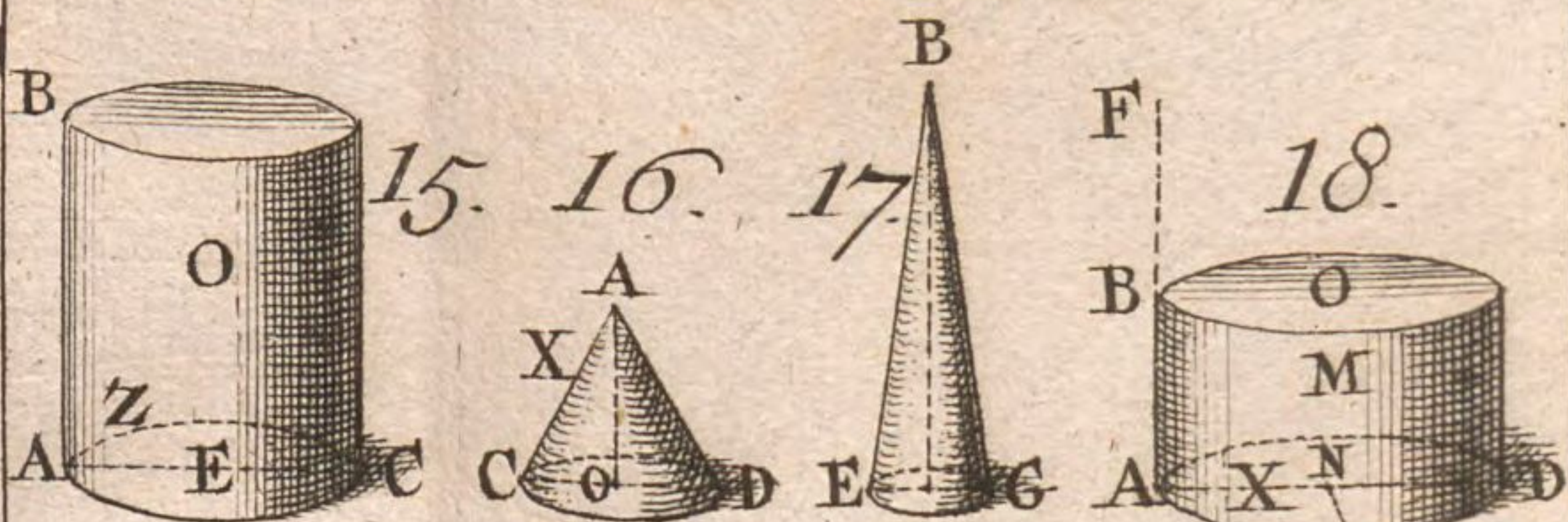
Si par la pensée, on sorte ces Spheres de ces Cûbes, on connoîtra évidemment, en les posant sur les faces de dessus de ces Cûbes, de manière qu'elles touchent le milieu de ces faces, que les figures qui en resultent sont Semblables, à cause que ces Spheres sont mêmes parties de ces Cûbes, & par le Lemme de la Prop. 23 du Liv. 11, & le 1 & 2 Principe du Liv. 6., que les Spheres X, Z, sont en raison Triplée de celle de leurs Diametres,

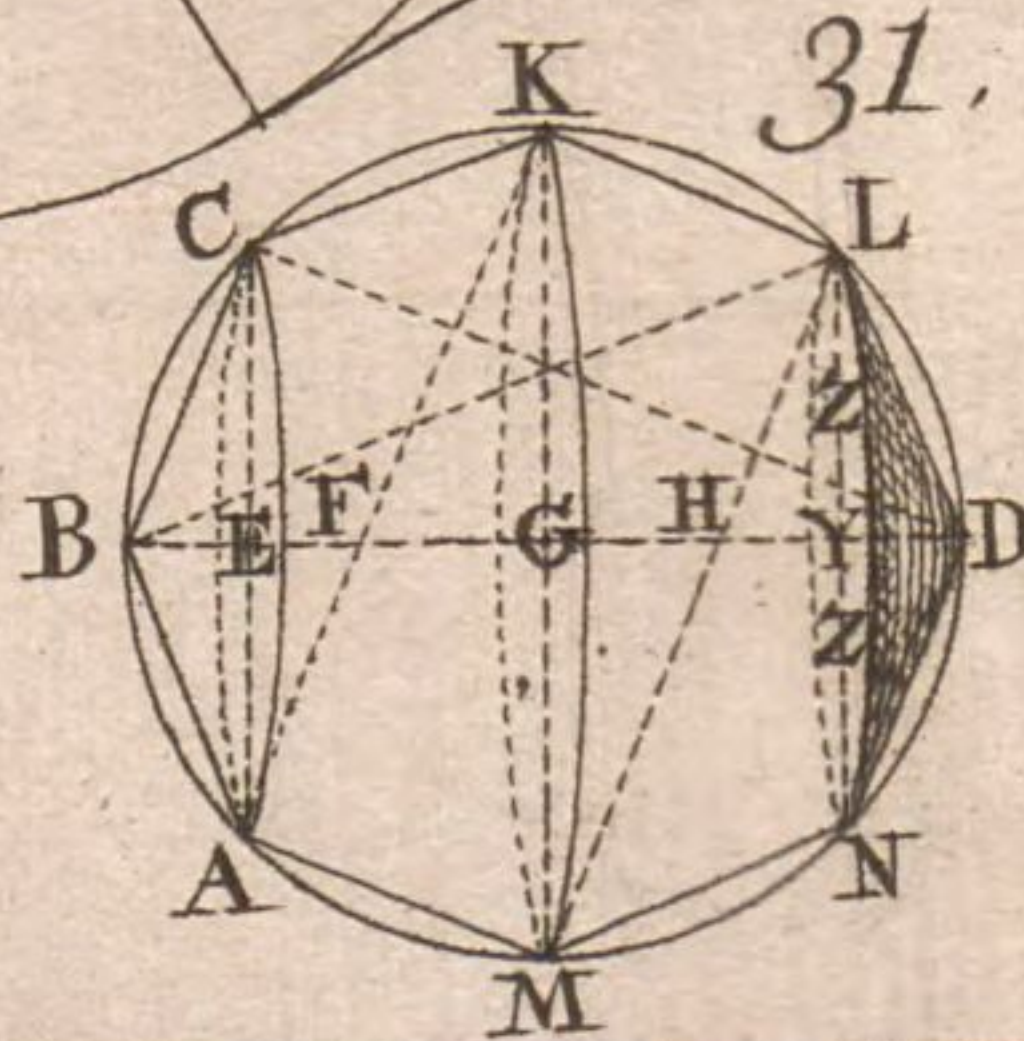
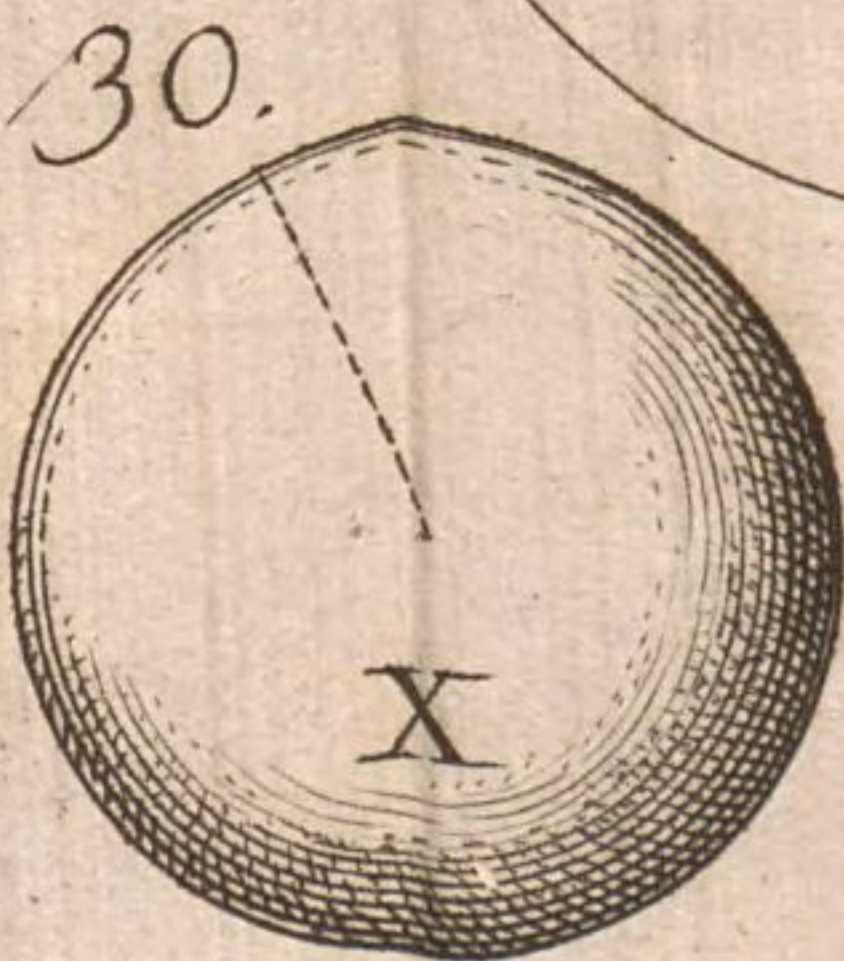
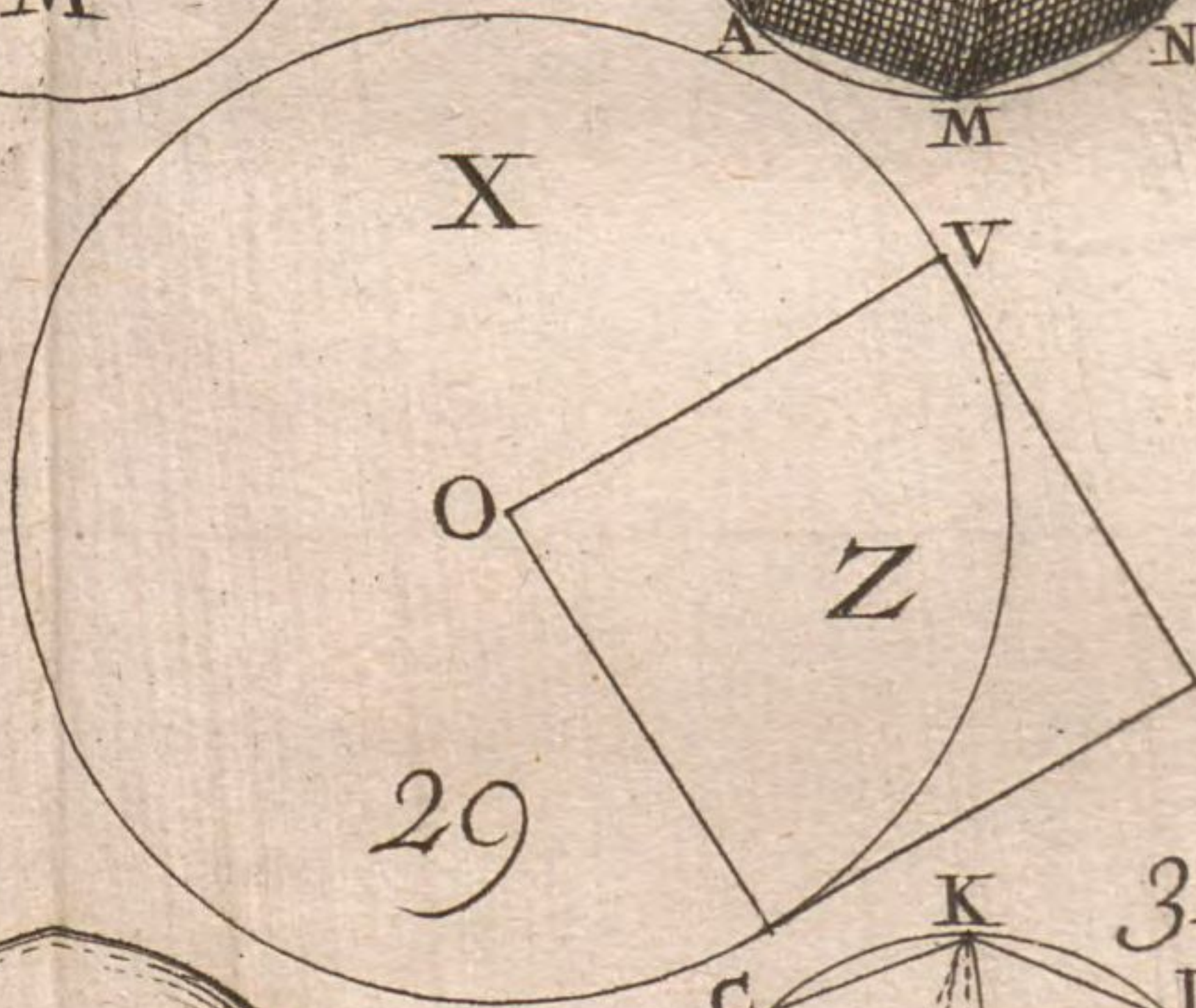
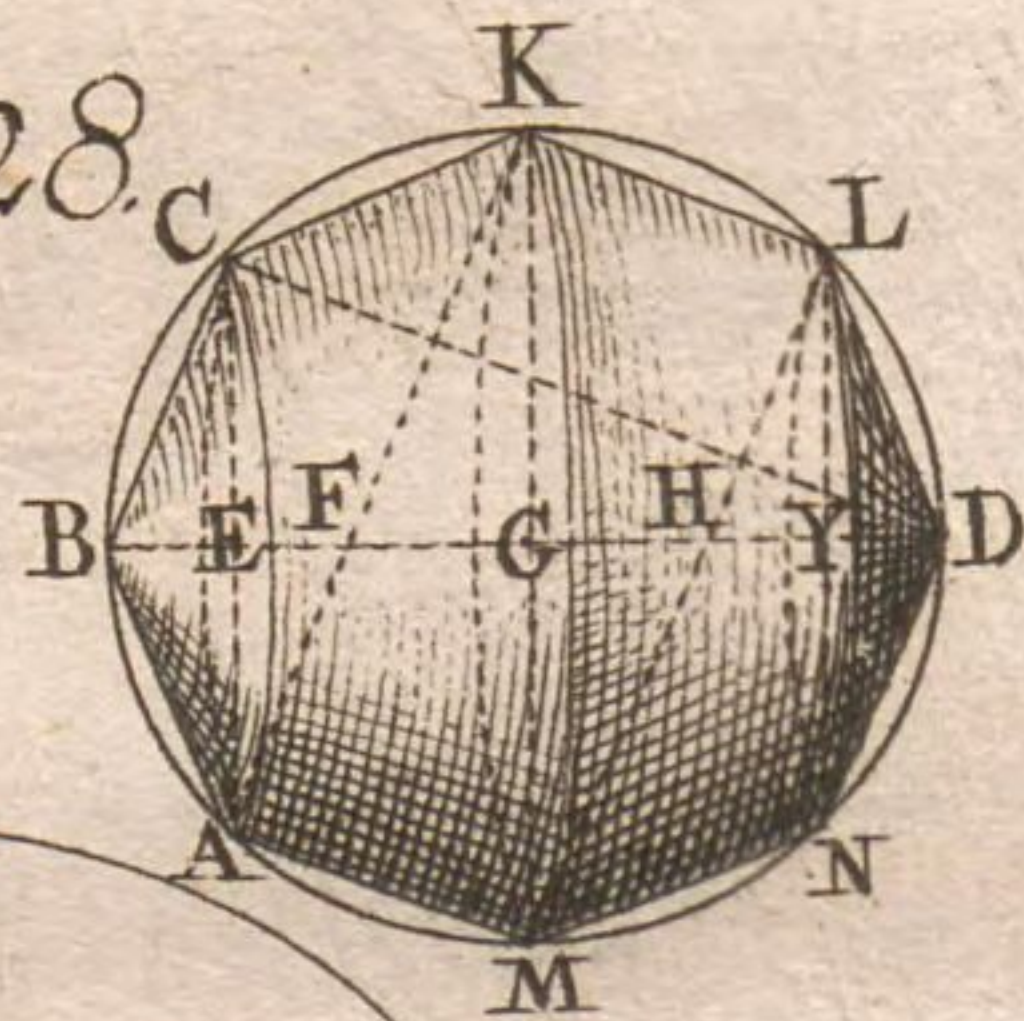
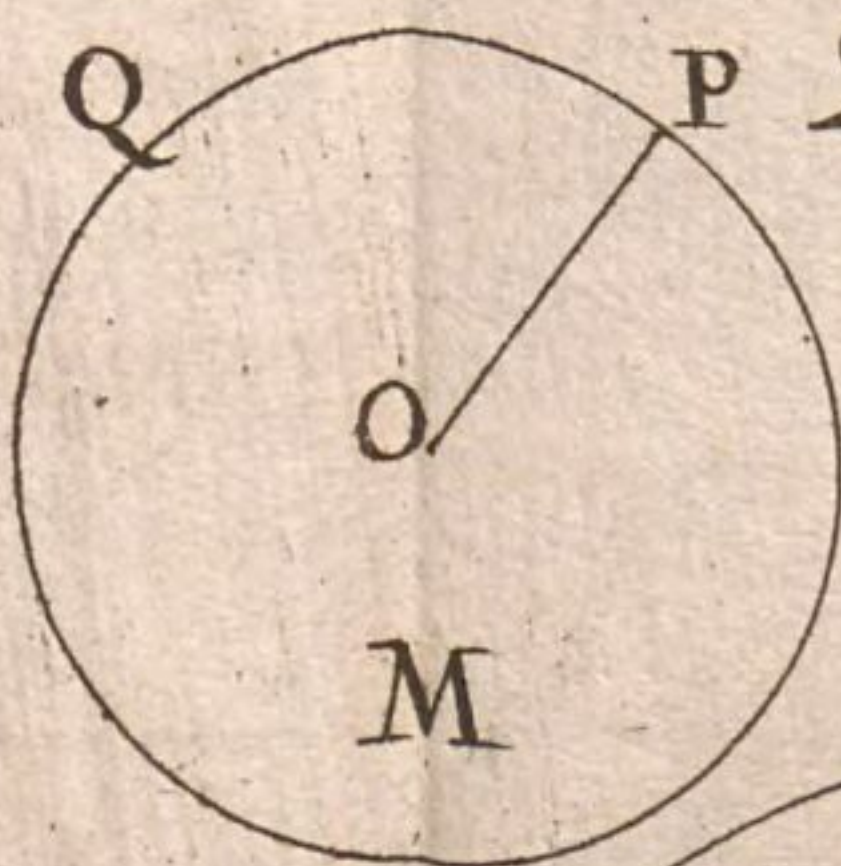
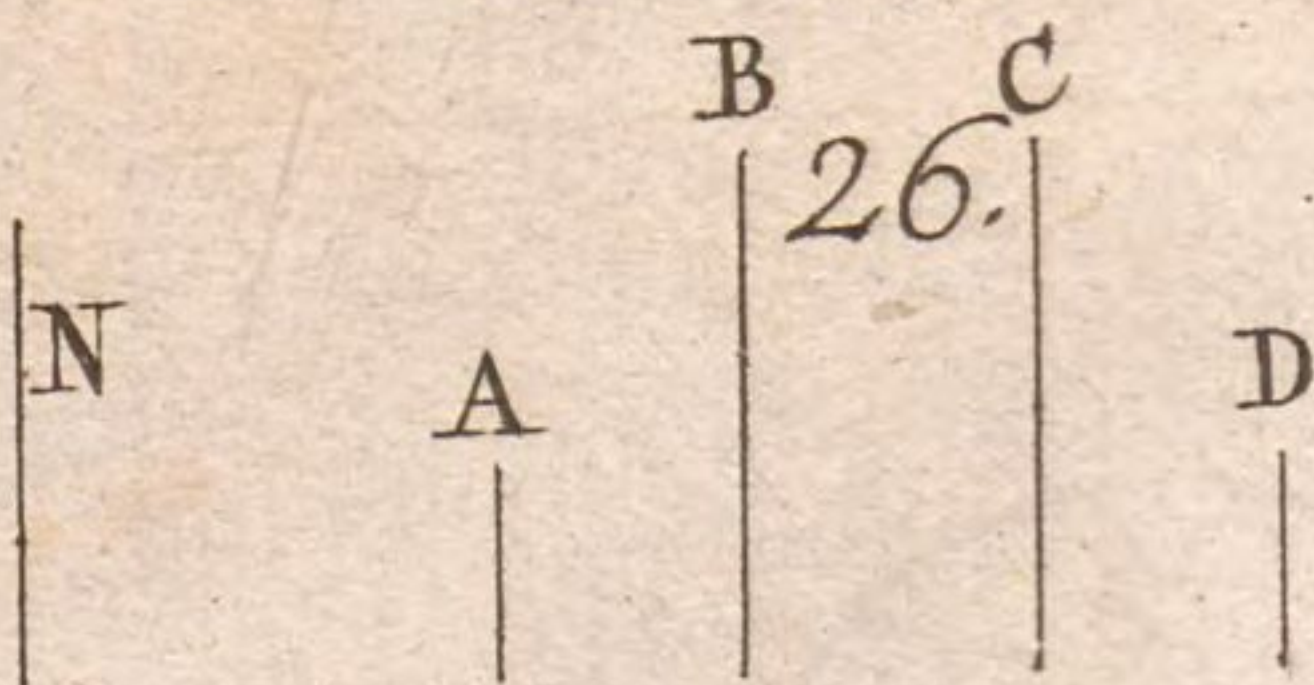
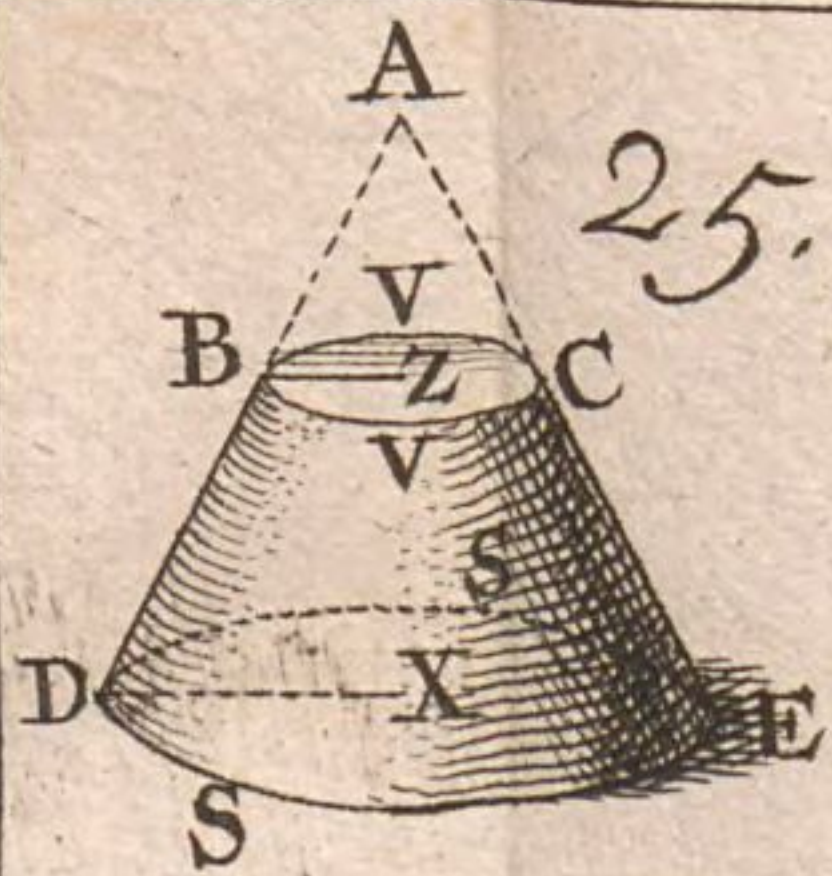
Fin du Livre douzième.

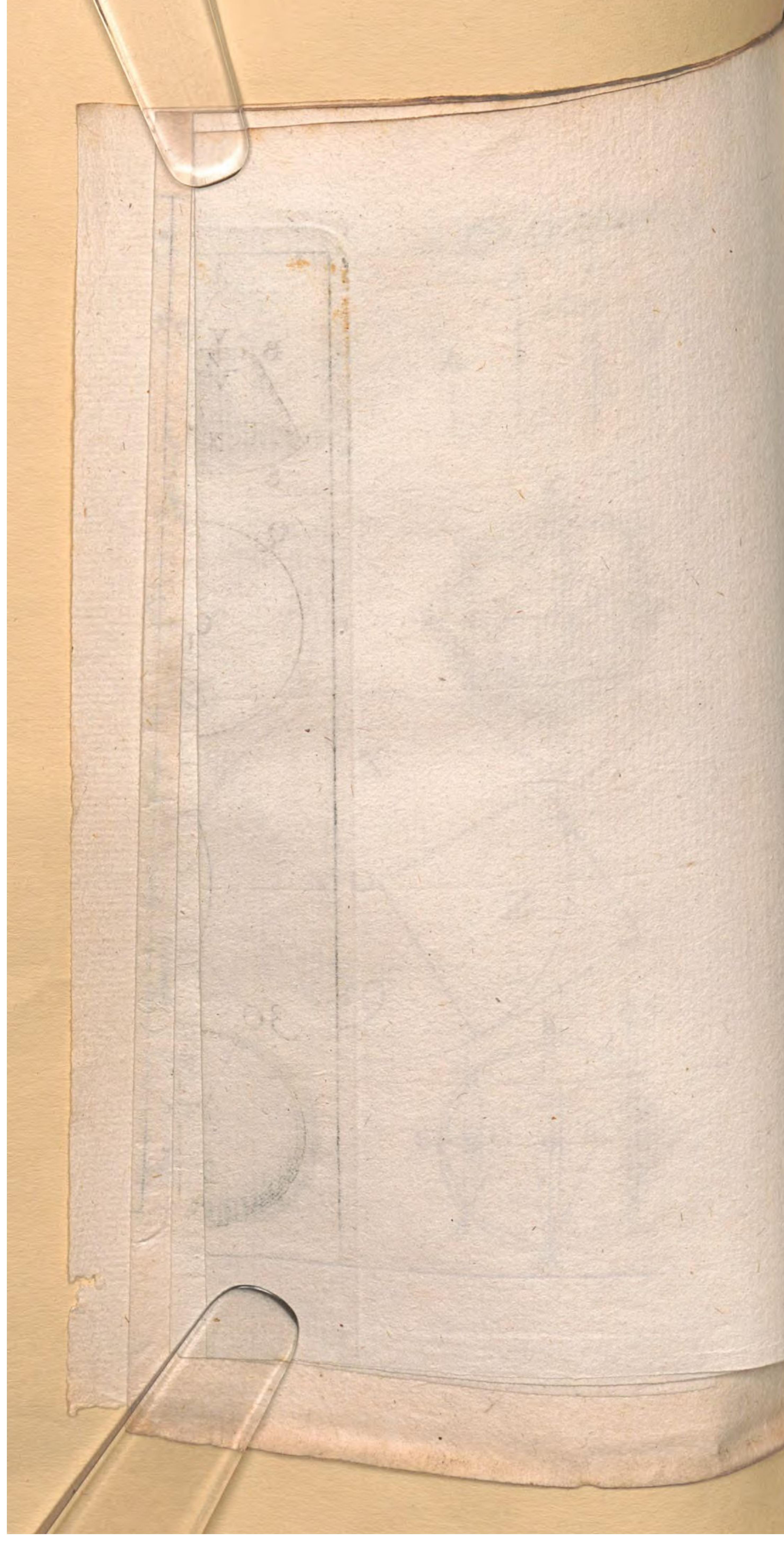


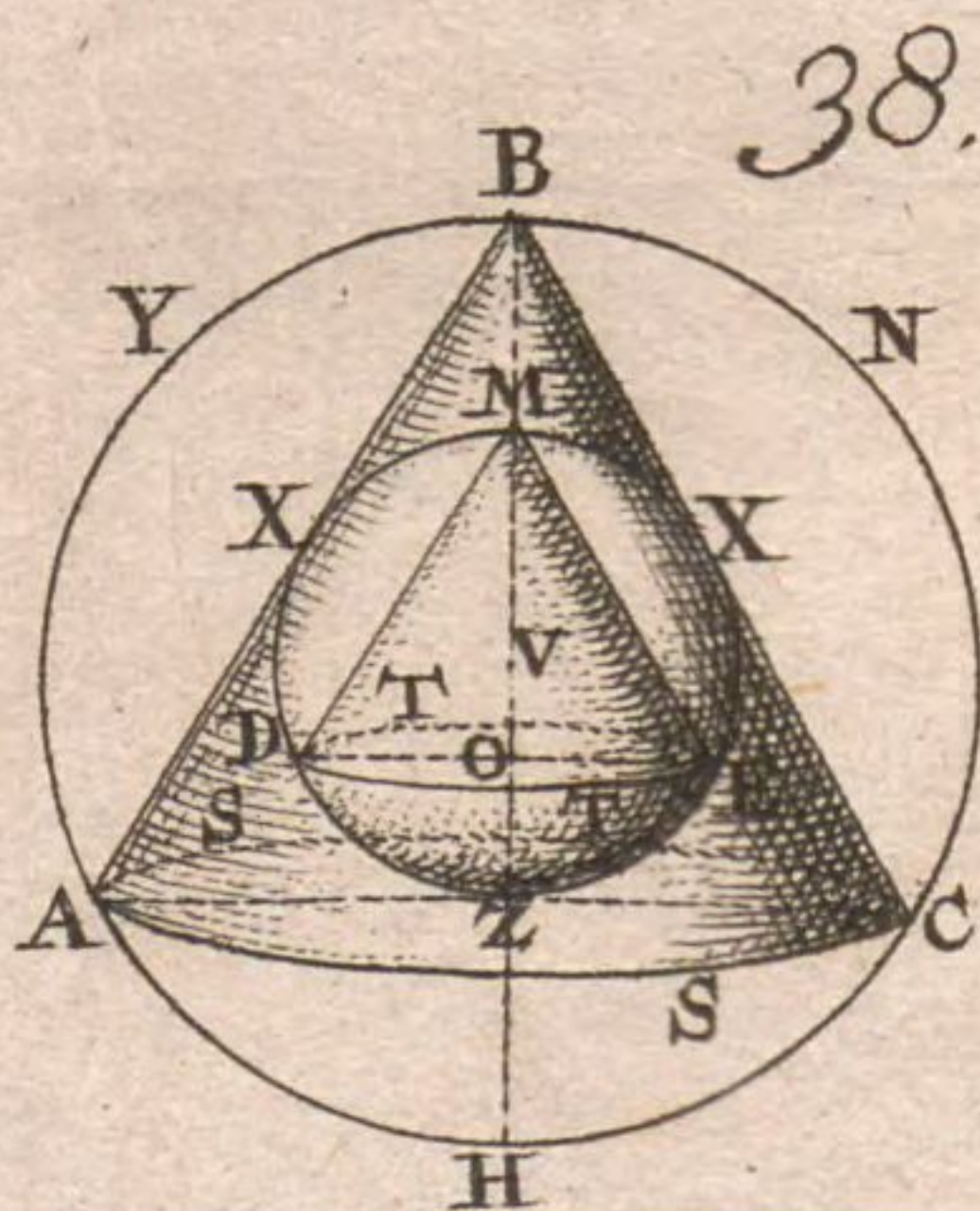
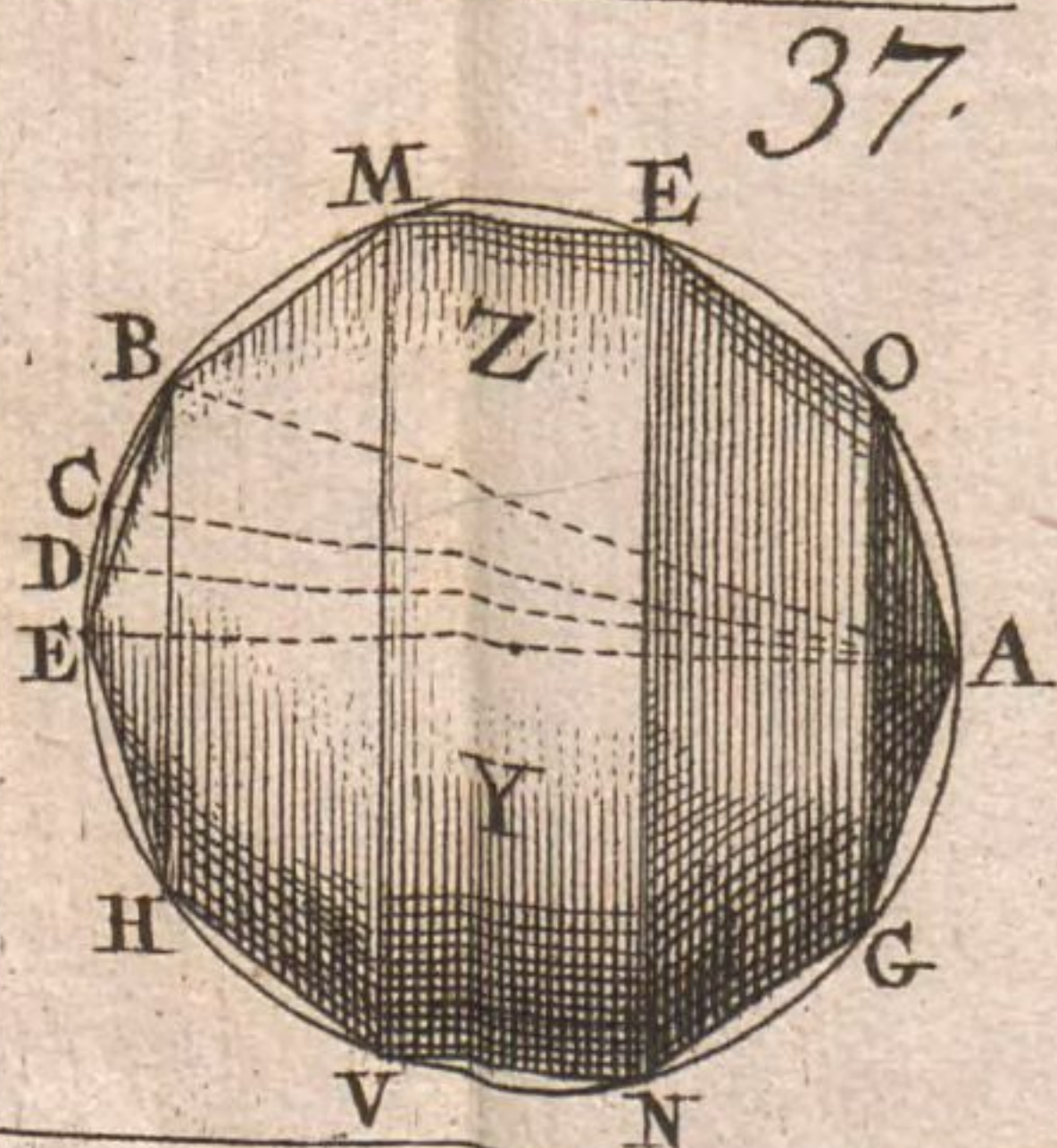
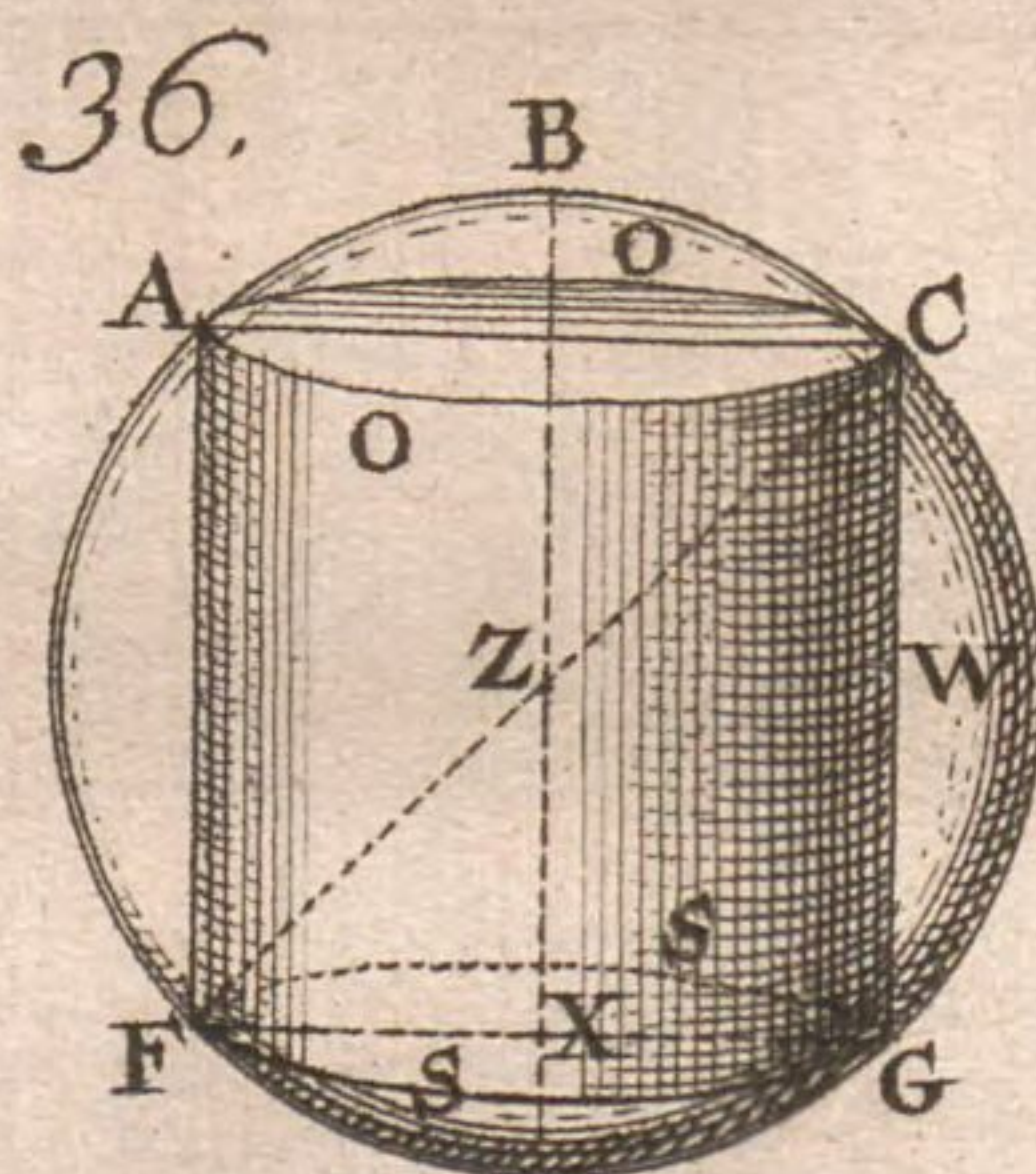
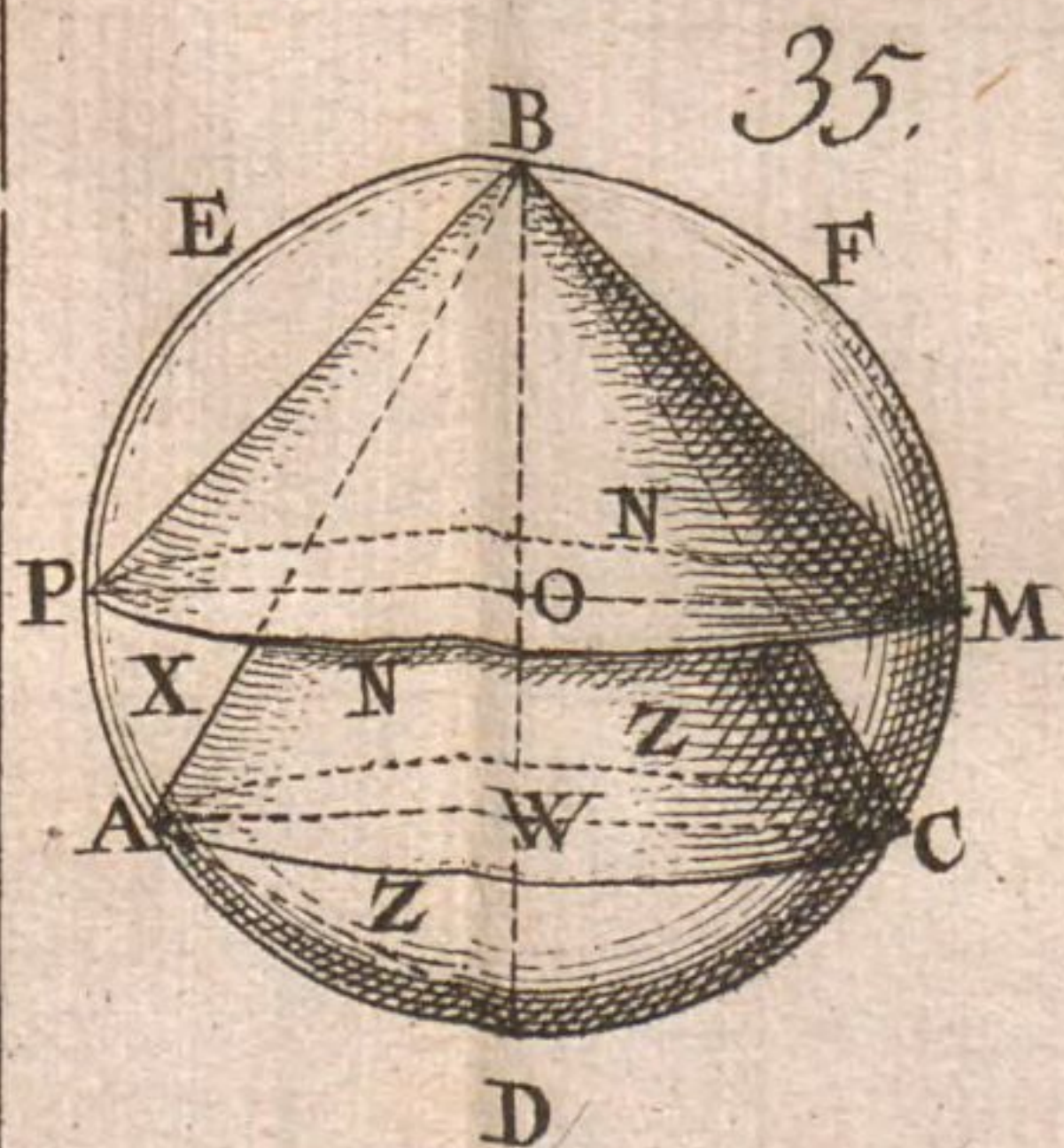
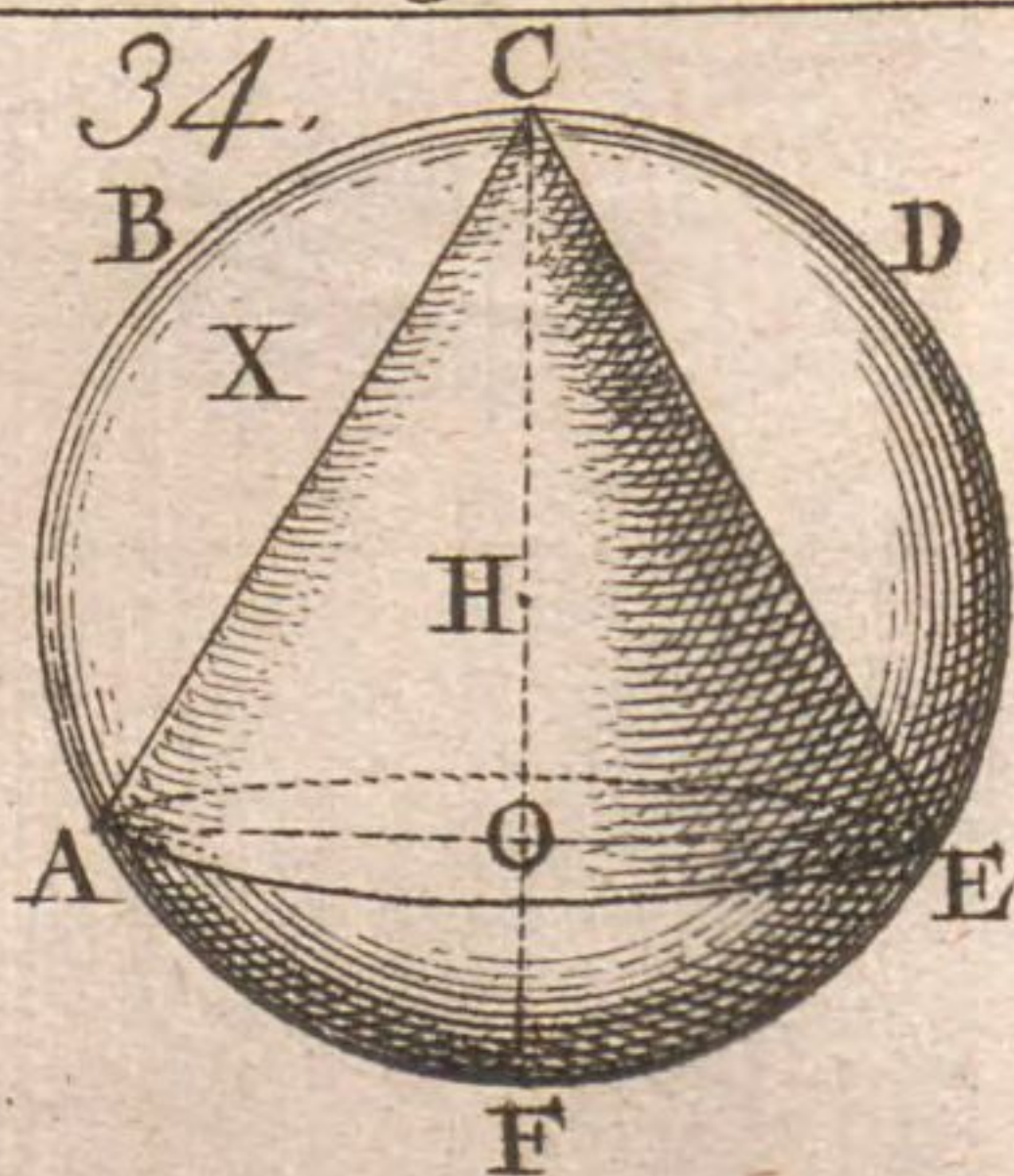
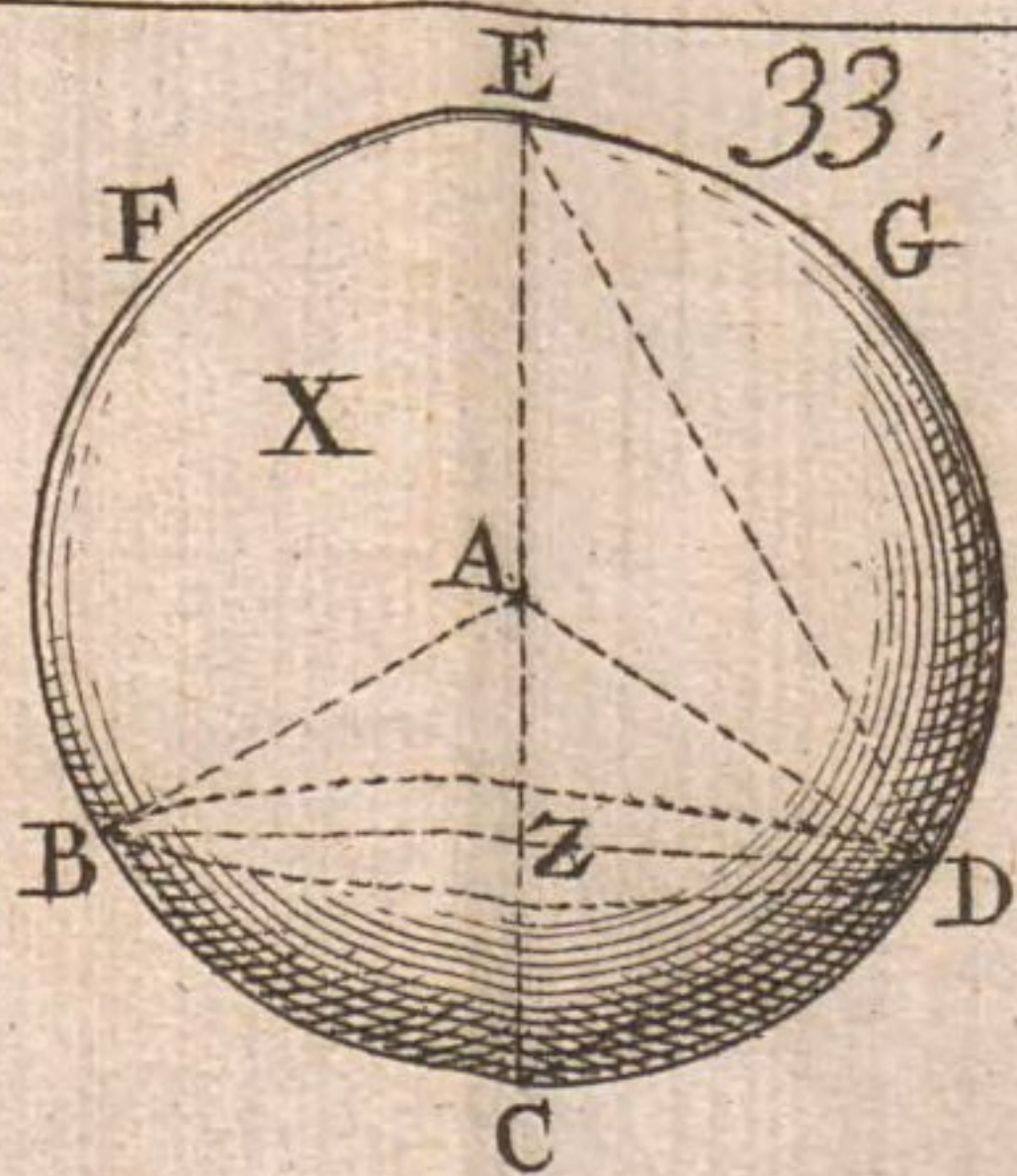


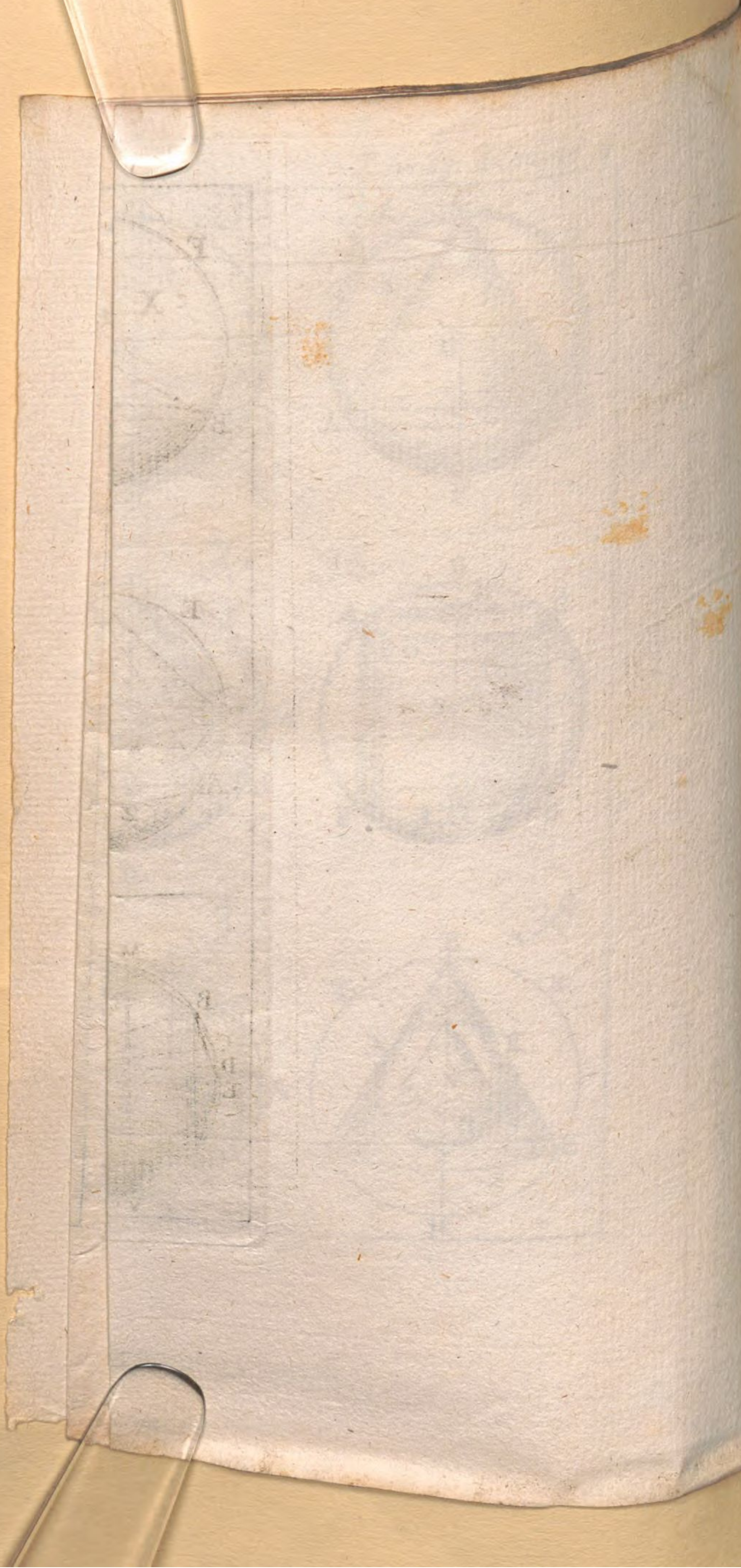




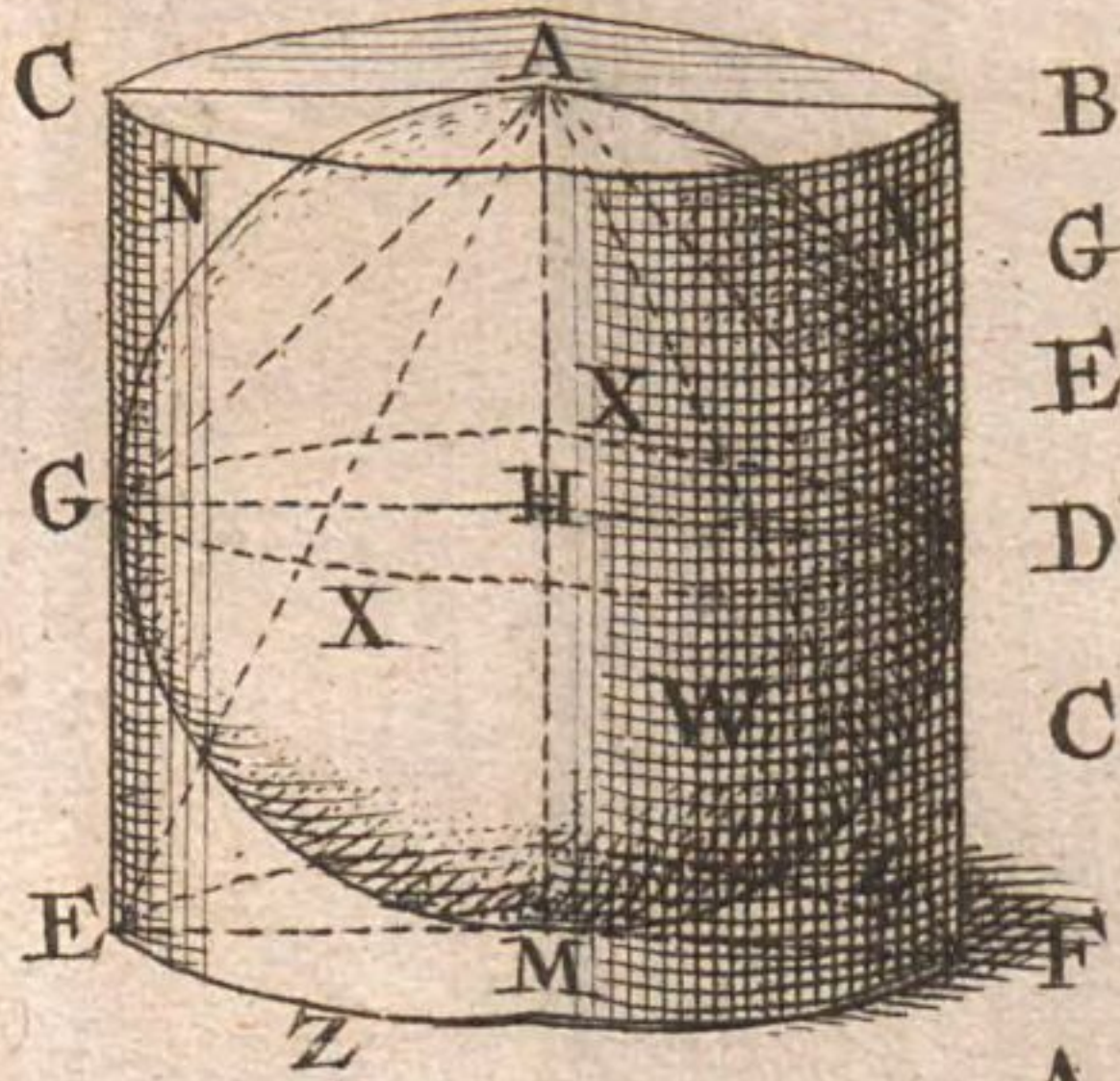




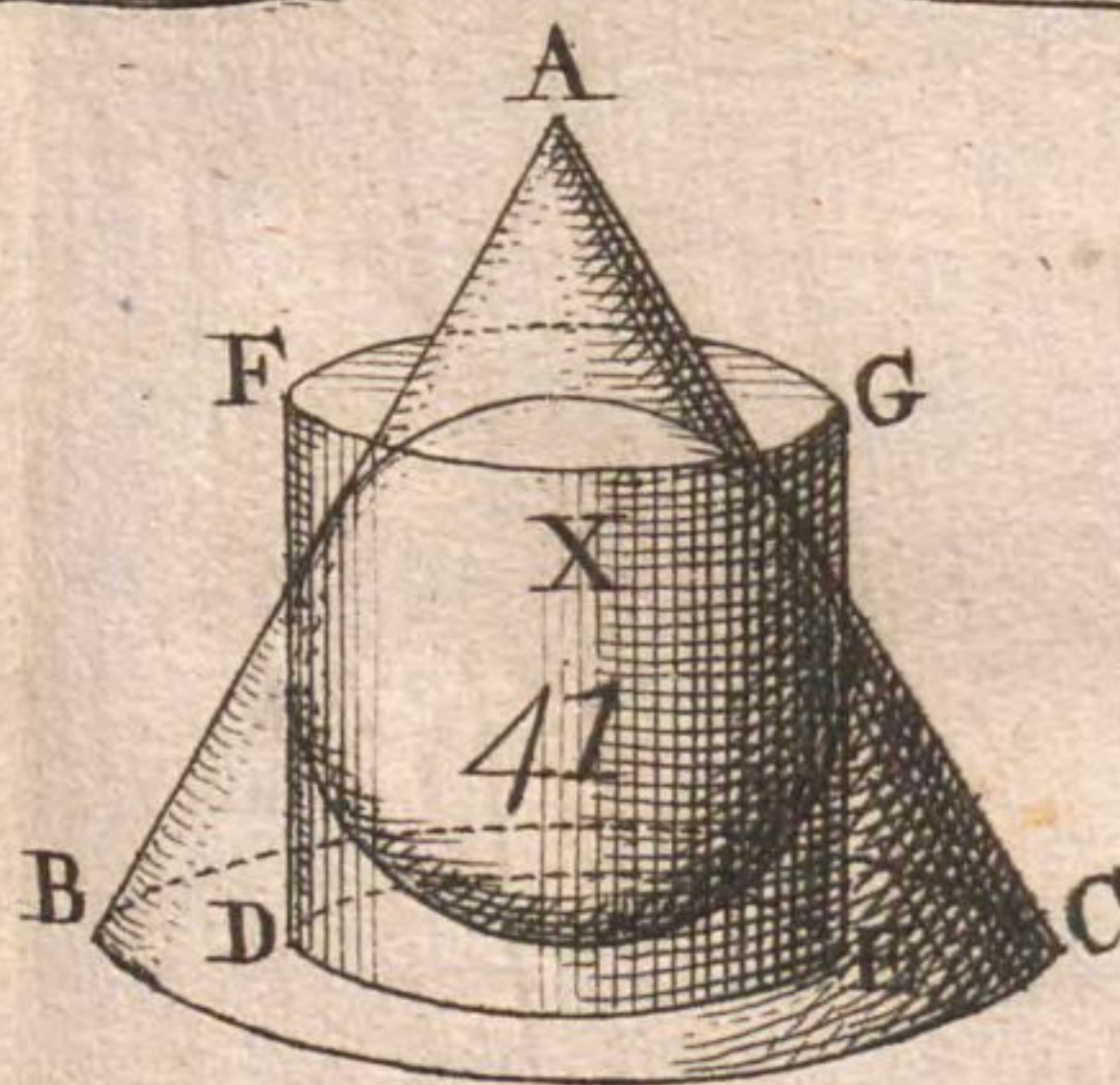
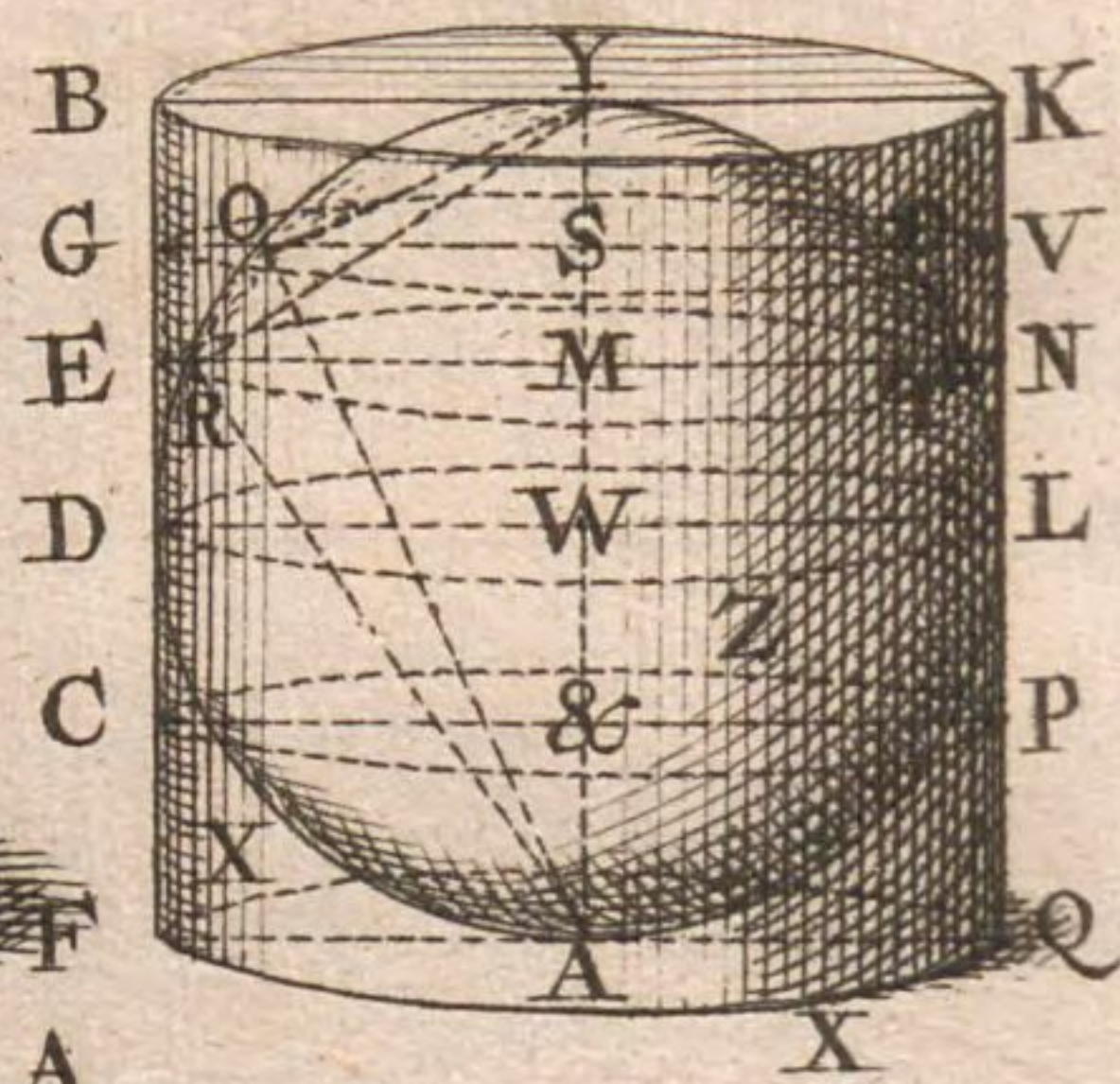




39.



40





LES
PLUS BEAUX
THEOREMES
D'ARCHIMEDE.

*Touchant le Cercle, la Sphere, le
Cilindre, & le Cône.*

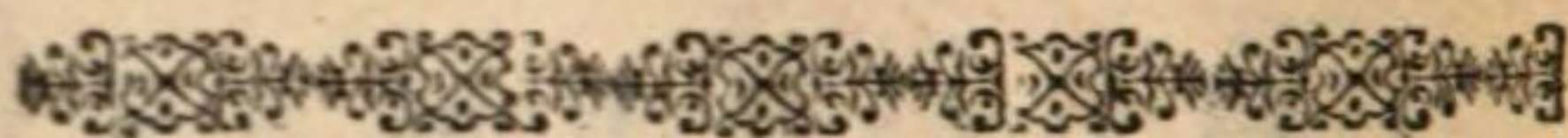


QUOIQUE l'on ait eû de très habiles Mathematiciens depuis que les Mathematiques sont connues, cependant personne ne revoque en doute qu'Archymede n'ait été un des plus Célèbres, & n'ait de beaucoup surpassé Ceux qui l'ont devancé; aussi ne peut on voir ou entendre ses Ouvrages sans les admirer, & sans être surpris de sa grande pénétration.

C'est pourquoi j'ai crû que le Lecteur me sauroit gré de joindre ici les plus beaux de
ses

ses Theoremes, & de les Lui expliquer & démontrer le plus clairement & le plus nettement qu'il m'est possible.

On ne peut pas douter qu'ils ne soient admirables en eux-mêmes & d'autant plus utiles qu'ils servent à faire connoître le progrès qu'on peut avoir fait dans les huit Livres précédens, qu'on peut faire dans la Lecture de toute sorte d'Auteurs, & dans ses réflexions particulières.



DEFINITIONS

I.

Plan-
che I
I fig.

SI le Diametre AF du Cercle Z est Perpendiculaire à la Ligne BD qui ne passe pas par le Centre C, on connoitra aisément par la seconde partie de la Prop. 3. du Liv. 3, que ce Diametre divise cette Ligne en deux également comme aussi l'Arc BFD par 21, 3, & que faisant tourner par la pensée le Secteur BFCD, au tour du rayon immobile CF, ce Secteur décrit par cette circonvolution entiere, le solide BCDF qui est appelé Secteur de Sphere; & que, faisant tourner de la même manière le Secteur BCDA, autour du rayon immobile AC, celui-ci décrit par cette circonvolution entiere, un Solide qui est aussi appelé Secteur de Sphere.

I I.

Si on s'imagine que les Segmens BEFD, *même*
DBAE tournent autour des parties FE, *fig.*
EA, du Diametre FA, du Cercle Z, de
manière qu'ils cessent de se mouvoir là où ils
auront commencez, on connoîtra éviden-
ment, qu'ils décrivent par ces circonvolu-
tions, les Solides BEFD, BEDA, qui sont
appelés Segmens de Sphere & aussi Por-
tions de Spnere.

REMARQUES.

I.

Remarqués bien que lorsque l'on traite-
ra des Surfaces des Solides, on n'y com-
prendra pas celles de leurs bâses, soit que
l'on parle de celle du Cône, de celle d'un
Fragment ou partie de Cône, de celle du
Cilindre, ou de celle d'une Portion ou Seg-
ment de Sphere, à moins qu'on ne le dise
expressement.

I I.

Et que lors que l'on traitera des Solides,
soit de la Piramide, du Prisme, du Cône,
ou du Cilindre, on supposera que ces Soli-
des sont Droits.

PRO-



PROPOSITION I.

THEOREME.

Plan-
che I
3 fig.

LE Poligone Régulier circonscrit au Cercle C, est égal à un Triangle Rectangle, dont la hauteur est égale au rayon de ce Cercle & la bāse au circuit de ce Poligone.

Et le Poligone Régulier inscrit est égal à un Triangle Rectangle, dont la hauteur est égale à l'Apoteme ou Perpendiculaire CO, & la bāse au circuit de ce Poligone.

DEMONSTRATION.

Si du Centre C, on tire, aux Angles de ces Poligones les Droites CA, CB &c. CD, CG &c., & la Droite ou rayon CM Perpendiculairement à AB, on connoitra évidemment par 12., 4, que les Triangles, qui composent le Poligone circonscrit, sont égaux en tout sens, & que par consequent ils ont mêmes hauteurs CM, & par 1, 6, qu'un Triangle Rectangle qui a même hauteur que ces premiers, & la bāse égale aux leurs prises ensemble ou, par égalité,

au

au circuit de ce Poligone, est égal à la somme de ces Triangles ou, par égalité, à ce Poligone circonscrit; ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera de la même manière que l'Inscrit est égal à un Triangle Rectangle, ^{même} dont la hauteur est égale à l'apoteme CO, ^{fig.} & la bâte au circuit de ce Poligone.

COROLLAIRES.

I.

Il suit de ce Theoreme, que le Cercle est égal à un Triangle Rectangle, dont la hauteur est égale à son rayon & la bâte à sa circonference.

DEMONSTRATION.

Car si par la Démonstration du Lemme de la Proposit. 5. du Liv. 12., on entend un Cercle & Poligone au lieu de Cilindre & de Parallelepipedes, on connoitra aisément, que le Cercle peut-être pris pour un Poligone Régulier d'une infinité de côtés, & par égalité, qu'il est, par la Précéd., égal à un Triangle Rectangle, dont la hauteur est égale à son apoteme, qui est le rayon, & la bâte, à sa circonference; ce qu'il falloit démontrer.

I I.

Il suit de ce Corollaire & du 4 de la Prop. 28. du Liv. 1, que le Cercle est égal à un Rectangle compris sous son rayon & sa demie circonference.

I I I.

Et par 1. 6, qu'un Rectangle, compris sous son rayon & sa circonference, en est double.

I V.

Et par la même, qu'un Rectangle, compris sous son Diametre & sa circonference, en est Quadruple.

S C H O L I E S.

I.

Il suit évidemment du Corollaire 1. de ce Theoreme, que pour mesurer le Cercle, il faut multiplier sa circonference par le quart de son Diametre, ou, par Coroll. 2, sa demie circonference par son rayon, d'où il suit.

II.

Que pour mesurer la circonference d'un Cercle, il faut diviser son Aire par le quart de son Diametre; car multipliant sa circonference Z par le quart X , de son Diametre, on a, par le Scholie précéd., la mesure ZX , de ce Cercle, & divisant cette mesure ZX par le quart X du Diametre de ce Cercle, le quotient Z est, comme il est évident, la circonference de ce Cercle.

PROPOSITION II.

THEOREME.

LE Cercle Z est au Quarré $ABCD$, qui lui est inscrit, comme sa demie circonference ABC à son Diametre AC . *Planche 1.*

Et ce Cercle Z , est au Quarré $EFHY$, *2. fig.* qui lui est circonscrit, comme la quatrième partie de sa circonference à son Diametre AC .

DEMONSTRATION.

Car ce Cercle est, par le Coroll. 2 de la précéd., égal à un Rectangle compris sous son rayon AD , ou AE , & sa demie cir-

T

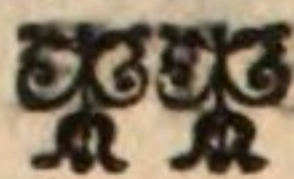
confe-

290. LES PLUS BEAUX

conference ABC; & le Rectangle AF, compris sous le même rayon AD, ou AE, & le Diametre AC, est égal au Quarré inscrit ABCD; à cause que ce Rectangle AF, est double de la moitié NZ, de ce Quarré inscrit; & par 1, 6, ces deux Rectangles sont entr'eux comme leur bāse; par consequent le Rectangle, égal au Cercle Z, est au Rectangle AF, égal au Quarré inscrit, comme sa bāse, qui est la demie circonference ABC, à la bāse AC qui est le Diametre, & par égalité, le Cercle Z est au Quarré ABCD qui lui est inscrit, comme sa demie circonference ABC, à son Diametre AC; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que ce Cercle Z est, par les raisons précéd., au Rectangle AF, comme sa demie circonference ABC à son Diametre AC, on conclut évidemment, par égalité, que ce Cercle, est au double du Rectangle AF, ou, par égalité, au Quarré circonscrit EFHY, comme la quatrième partie de la circonference à son Diametre AC; ce qui restoit à démontrer.



Car ce Cercle est, par le Coroll. 2 de la précéd., égal à un Rectangle compris sous son rayon AD, ou AE, & la demie circonference.

T

PRO-



PROPOSITION III.

THEOREME.

LEs circonferences des Cercles O, M *4 fig.* sont entr'elles comme les Diametres AB, DE, de ces Cercles.

DEMONSTRATION.

Car si on y inscrit des Poligones Réguliers & Semblables, de manière que leurs côtez ne soient pas coupez par les Diametres de ces Cercles; on connoitra évidemment, par le Coroll. de la Prop. 13. du Liv. 6, en tirant les rayons OC, MN, que les Triangles Ifofceles COA, NMD sont Semblables, & par 4, 6, que la raison du côté AC au côté DN, est égale à celle de AO à DM, & par 1, 12, que les petits Segmens ponctuez du Cercle O, sont Semblables aux petits Segmens ponctuez du Cercle M, & par le 1. Principe du Liv. 6, que le Secteur CAO est Semblable au Secteur NDM, & que par consequent la raison de l'Arc AC à l'Arc DN, est égale à celle du rayon AO, au rayon DM, & par égalité, que la raison de la circonference du Cercle O, à la circonference du Cercle M, est

T 2

égale

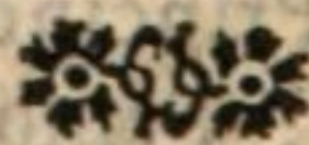
égale à celle du rayon AO au rayon DM ou, ce qui est la même chose, à celle du Diametre AB au Diametre DE; ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

5 & 7
fig.

Il suit évidemment de cette Proposition, que connoissant la mesure du Diametre DE, du Cercle Z, & celle de sa circonference YN; celle de la circonference du Cercle X, est aussi connue; On suppose que celle de son Diametre l'est déjà.

Car si on pose pour premier nombre, le Diametre DE, du Cercle Z, & pour second le Diametre AB, du Cercle X, & pour troisième la circonference N du Cercle Z; il est évident, que multipliant AB par N, & divisant le produit ABN, par le Diametre DE, le quotient $\frac{ABN}{DE}$ est, par la précédente, la mesure de la circonference du Cercle X, parce que la raison de DE à N, est égale à celle de AB à $\frac{ABN}{DE}$ par la demande du Liv. 5, &c.





PROPOSITION IV.

THEOREME.

LA Surface de tout Prisme est égale à un Rectangle, dont la hauteur est la même ou égale à la sienne, & la bāse au circuit de celle de ce Prisme.

Soit par exemple le Prisme GA.

6 fig.

DEMONSTRATION.

Parce que tous les Plans de ce Prisme sont Rectangles par la suite de la Défin. 15. du Liv. 11, & qu'ils ont mêmes hauteurs EC ou FA &c. & que par 1, 6, ils sont, pris ensemble, égaux à un Rectangle qui a même hauteur qu'eux, & la bāse égale aux leurs prises ensemble, & que tous ces Plans Rectangles composent la Surface de ce Prisme & leurs bāses le circuit de celle de ce Prisme; on conclut évidemment, par égalité, que le Rectangle compris sous la hauteur EC ou DG, & le circuit EGHF, est égal à la Surface du Prisme AG, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

8 fig.

Il suit de cette Proposition que la Surface d'un Cilindre, comme du Cilindre Z, est égale à un Rectangle de même ou égale hauteur FD, & dont la bāse est égale au circuit du Cercle CD ou à celui du Cercle F.

DEMONSTRATION

Car ce Cilindre pouvant être considéré comme un Prisme Poligone d'une infinité de faces par le Lemme de la Prop. 5 du Liv. 12; on conclut évidemment par la précédente, que sa Surface est égale à un Rectangle compris sous sa hauteur FD, & le circuit du Cercle CD; ce qu'il falloit démontrer.

II.

8 fig.

Il s'ensuit aussi, que si les Cilindres X, Z ont les hauteurs égales, leurs Surfaces sont entr'elles comme les Diametres AB, CD des bāses de ces Cilindres.

DEMONSTRATION.

Car leurs Surfaces sont égales aux Rectangles compris sous leurs hauteurs & circuits de leurs bâses, & ces Rectangles ont mêmes hauteurs, & par 1, 6, ils sont entr'eux comme leurs bâses, & par égalité, les Surfaces de ces Cilindres sont entr'elles comme les circuits de leurs bâses, ou, par 3, comme les Diametres de ces bâses; ce qu'il falloit démontrer.

III.

J'ajoute que si les Cilindres X, Z ont les bâses égales, la Surface du Cilindre X est à celle du Cilindre Z, comme la hauteur AB à la hauteur CD. *fig.*

Voyés le Coroll. précéd. & celui de la Prop. I, du Liv. 6.

IV.

Et qu'enfin si les Cilindres X, Z sont Semblables, leurs Surfaces sont entr'elles en raison doublée de celle des Diametres de leurs bâses, ou sont entr'elles comme les Quarres de ces Diametres. *fig.*

DEMONSTRATION.

Car ces Cilindres étant Semblables, on connoît par la Défin. 6 du Liv. 12., que l'Axe où, par égalité, la hauteur AB, est au Diametre BF, comme l'Axe ou, par égalité, la hauteur DC au Diametre CE, & par 3, que le Diametre BF. est au circuit de son Cercle N, comme le Diametre CE au circuit du sien O, & par égalité, que AB est au circuit du Cercle N, comme DC au circuit du Cercle O, & par la Défin. 1. du Liv. 6, que le Rectangle compris sous la hauteur AB, du Cilindre X, & le circuit de sa bâte N est semblable au Rectangle compris sous la hauteur CD, du Cilindre Z, & le circuit de sa bâte O, & par le 2. Coroll. du Lemme qui suit la Prop. 13. du Liv. 6, que ces Rectangles sont en raison doublée de celle de leurs hauteurs AB, CD, & par égalité, que les Surfaces de ces Cilindres X, Z sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs hauteurs AB, CD ou, par égalité, de celle des circuits des bâses de ces Cilindres, ou, par 3, de celle des Diametres de ces bâses, ou par le Coroll. 4. du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, comme les Quarrés de ces Diametres BF, CE; ce qu'il falloit démontrer.

V.

J'ajoute que, si les Cilindres X, Z sont *même* Droits, leurs Surfaces sont entr'elles en raison composée de celles de leurs hauteurs AB, CD, & Diametres BF, CE, des bâses de ces Cilindres.

DEMONSTRATION.

Car si par la pensée, on déplié ces Surfaces, on connoitra aisément par les raisons précédentes, qu'elles sont des Rectangles, qui étant Equiangles, sont, par 16, 6, en raison composée de celles de leurs côtés; & par égalité, que les Surfaces de ces Cilindres X, Z, sont entr'elles en raison composée de celle de leurs hauteurs AB, CD & de celle des circuits des bâses N, O ou, par 3, de celle des Diametres BF, CE de ces bâses; ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

La hauteur de la Surface de la Piramide ACDE, est une Ligne Droite AB la plus courte de toutes celles, qui sont abaissées de son sommet A, au circuit de la bâte DEC. 11 fig.





PROPOSITION V.

THEOREME.

*même
fig.*

LA Surface de cette Piramide, est égale à un Triangle Rectangle de même hauteur AB, que cette Surface, & dont la bafe est égale au circuit de celle de cette Piramide.

DEMONSTRATION.

Car les faces de cette Piramide sont des Triangles qui, par la Remarque 2, ont mêmes hauteurs, & qui par, 1, 6, sont égaux, pris ensembles, à un Triangle Rectangle de même hauteur qu'eux, & dont la bafe est égale aux leurs prises ensemble, &, par égalité, ce Triangle Rectangle est égal à la Surface de cette Piramide; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

Il suit de ce Theoreme, que la Surface du Cône Z, est égale à un Triangle Rectangle de même hauteur FC, & dont la bâte est égale au circuit de celle de ce Cône. 12 fig.

DEMONSTRATION.

Car le Cône pouvant être considéré, comme une Piramide d'un nombre infini de faces par le Lemme de la Prop. 5 du Liv. 12, on a raison de dire que la Surface de celui-ci est, par la précédente, égale à celle d'un Triangle Rectangle de même hauteur FC, & dont la bâte est égale au circuit de celle de ce Cône; ce qu'il falloit démontrer.

I I.

Il suit de ce Coroll. que les Surfaces, des Cônes X, Z, qui ont un égale hauteur ED, 12 fig. FD, sont entr'elles comme les Diametres DB, CD, des bates de ces Cônes.

DEMONSTRATION.

Car si on considere ces Surfaces comme des Triangles Rectangles, on connoitra aisément, par l'Hypothese, qu'ils ont mêmes hau-

300 LES PLUS BEAUX

hauteurs, & par 1, 6, qu'ils sont entr'eux comme leurs bâses, & par égalité, que les Surfaces de ces Cônes, sont entr'elles, comme les circuits des bâses BD, DC ou, par 3, comme les Diametres de ces bâses; ce qu'il falloit démontrer.

III.

13 fig. Et qu'enfin les Surfaces des Cônes X, Z, qui ont les bâses égales, sont entr'elles comme leurs hauteurs GA, FC.

Voyés le Coroll. précédent & celui de la Proposition 1. du Liv. 6.

IV.

14 fig. J'ajoute que si les Cônes X, Z sont Semblables, leurs Surfaces sont entr'elles en raison doublée de celle des Diametres CD, AB des bâses de ces Cônes.

DEMONSTRATION.

Parce que la raison de l'Axe GO au Diametre CD, est, par la Définition 7. du Liv. 12, égale à celle de l'Axe HC au Diametre AB, on conclut évidemment par la raison Alterne, que GO est à HC, comme CD à AB, ou, ce qui est la même chose, comme le rayon CO au rayon AC, & par le Coroll. 2 de la Prop. 4 du Liv. 6, que le Triangle Rectangle GOC, est Semblable au Triangle Rectangle HCA, & par égalité,

égalité, que GC est à AH, comme CO à AC ou, par 3, comme le circuit du Cercle O au circuit du Cercle C, d'où il s'ensuit que, si par la pensée, on change les Surfaces, de ces Cônes, en Triangles Rectangles, celui qui a GC pour hauteur & le circuit du Cercle O pour bête, sera Semblable à celui qui a HA pour hauteur & le circuit du Cercle C pour bête; & par le Coroll. 1 du Lemme qui suit la Prop. 13. du Liv. 6, ces Triangles Rectangles seront en raison doublée de celle de leurs côtés, & par égalité, la Surface du Cône X sera à celle du Cône Z en raison doublée de celle de GC à AH ou de celle du circuit du Cercle O au circuit du Cercle C ou, par 3, de celle du Diametre CD au Diametre AB; ce qu'il falloit démontrer.

V.

Je dis encore que, si les Cônes X, Z *même* sont Droits, leurs Surfacesont entr'elles en *fig.* raison composée de celles de leurs hauteurs GD, HA & Diametres CD AB, des bêtes de ces Cônes.

DEMONSTRATION.

Car ces Surfaces étant égales à des Triangles Rectangles, compris sous leurs hauteurs & leurs bêtes, on conclud évidemment par le Corollaire 1. de la Prop. 16 du Liv. 6 & par égalité, que les Surfaces de ces Cônes, sont entr'elles en
raison

raison composée de celle de leurs hauteurs & de celle des circuits de leurs bâses ou, par 3, de celle des Diametres AB, CD des bâses de ces Cônes; ce qu'il falloit démon-
trer.

V I.

Plan-
che 2
16 &
17 fig.

J'ajoute que si les Surfaces des Cônes X, Z sont égales, leurs hauteurs CA, EB & Diametres EG, CD des bâses de ces Cônes, sont réciproques.

Et que si les hauteurs, CA, EB & Diametres EG, CD des bâses de ces Cônes sont Réciproques, leurs Surfaces sont égales.

C'est ce qui est très évident par les raisons précéd., par les 2 Coroll. de la Prop. 10. du Liv. 6 & par la 3. de celui-ci.

S C H O L I E.

Il suit évidemment du 1. de ces Coroll., que pour mesurer la Surface d'un Cône, il faut multiplier la bâte de cette Surface, c'est-à-dire le circuit de celle de ce Cône, par la moitié de la hauteur de cette Surface, ou, ce qui est la même chose, multiplier la hauteur de cette Surface par la moitié du circuit de la bâte de ce Cône &c.

Il est aisé de remarquer ici que ce que nous avons dit au Livre Sixième des Rectangles & Triangles Semblables, convient aux Surfaces des Cilindres & Cônes.

De

De sorte qu'étant facile de décrire, par la suite du Coroll. 4. du Lemme qui suit la Prop. 13. du Liv. 6, un Rectangle ou un Triangle, qui soit en raison donnée, avec un Semblable donné; on peut aussi trouver par les raisons précédentes un Cilindre ou un Cône dont la Surface aura une certaine raison avec celle d'un Semblable donné etc.



PROPOSITION VI.

THEOREME.

LA Surface du Cilindre $\odot$, est égale à 15 & celle d'un Cercle V , dont le rayon ED , est moïen Proportionnel entre sa hauteur AB & le Diametre AC de sa bâte.

DEMONSTRATION.

1 $AB. ED :: ED. AC$ Parce que AB ,
 2 $ED. X :: AC. 2Z$ est à ED , com-
 3 $ED. AC :: X. 2Z$ me ED à AC
 4 $AB. ED :: X. 2Z$ par supp., on
 $AB. 2Z - ED. X$ connoît aisément
 par 3, que ED est au circuit X , comme
 le rayon AE au circuit Z , ou comme le
 Diametre AC au double du circuit Z , &
 par la raison Alterne, que ED , est à AC ,
 comme X à $2Z$, & qu'enfin, AB étant,
 par

304 LES PLUS BEAUX

par l'Hypot., à ED, comme ED à AC ou, par la troisième proportion comme X à 2 Z, AB est par égalité à ED, comme X à 2 Z, & par 11. 6, que le Rectangle compris sous les extrêmes AB, 2 Z, est égale au Rectangle sous les moyennes ED, X, & par le Coroll. 1 de la Prop. 4, que le Rectangle compris sous la hauteur AB & le circuit Z est égal à la Surface du Cilindre O, & par 1, 6, que le Rectangle compris sous la même hauteur AB & 2 Z, est, par égalité, double de la Surface de ce Cilindre, & par le Coroll. 3. de la Prop. 1., que le Rectangle compris sous le rayon ED & la circonférence X, est double du Cercle V; par conséquent les Rectangles sous les extrêmes & moyennes étant égaux, leur moitié l'est aussi, de sorte donc que, par égalité, on a raison de dire que la Surface du Cilindre O, est égale à celle du Cercle V, dont le rayon ED, est moyen proportionnel entre la hauteur AB & le Diametre AC; ce qu'il falloit démontrer.



PRO-



PROPOSITION VII.

THEOREME.

LA Surface du Cilindre O, est à celle de 18 ^o
la bâte CN, comme sa hauteur AB au 19 *fig.*
quart AX du Diametre de cette bâte.

PREPARATION.

V. CN. ED. NA Que le rayon ED du
V. CN. AF. Z Cercle V, soit mo-
V. CN :: AF. NA ien Proportionnel
V. CN :: AB. AX entre la hauteur AB
M. CN :: AB. AX & le Diametre AD;
la Surface de ce Cercle sera, par la précéd.,
égale à celle de ce Cilindre, & que la Li-
gne Z, soit moienne Proportionnelle entre
le double AF, de la hauteur AB, & le
rayon NA.

DEMONSTRATION.

Le Cercle V est au Cercle ou bâte CN
en raison doublée de celle de son rayon ED
au rayon NA par le Coroll. 3 du Lemme
qui suit la Prop. 13 du Liv. 6 ou, par éga-
V lité,

lité, de celle de AF à Z, & par la Définition 14 du Liv. 5, le Cercle V est au Cercle ou bafe CN, comme la hauteur AF au rayon NA, & par égalité, le Cercle V est à la bafe CN, comme la hauteur AB au quart AX du Diametre AD; par consequent la Surface M de ce Cilindre, étant égale au Cercle V, on a raison de dire que, par égalité, elle est à celle de la bafe CN, comme sa hauteur AB au quart AX, du Diametre de cette bafe, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRES.

I.

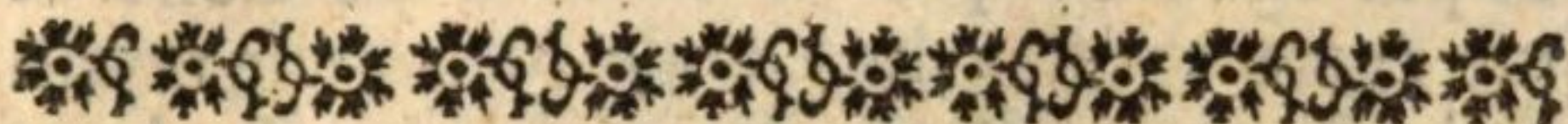
Il suit évidemment de cette Proposition que, si un Cilindre, a sa hauteur égale au quart du Diametre de sa bafe, sa Surface est égale à celle de sa bafe.

I I.

Et que si sa hauteur est égale au rayon de sa bafe, sa Surface est double de celle de sa bafe.

I I I.

Et qu'enfin si la hauteur d'un Cilindre, est égale au Diametre de sa bafe, sa Surface en est Quadruple &c.



PROPOSITION VIII.

THEOREME

LA Surface du Cône X, est égale à cel-²⁰ le d'un Cercle N, dont le rayon EF,²¹ est moïen Proportionnel entre la hauteur AB, de sa Surface, & le rayon CD ou CB de sa bâte DV. *fig.*

DEMONSTRATION.

AB. EF :: EF. CB Car AB étant, par EF. CB :: W. V Supp., à EF, comme EF à CB, il s'en-
 AB. EF :: W. V AB. V - EF. W suit par 3, que EF
 est à CB, comme le circuit W, du Cercle N, au circuit V, de la bâte du Cône X,
 & qu'enfin, AB étant à EF, comme EF à CB; AB est, par égalité, à EF, comme W à V, & par 11, 6, que le Rectangle compris sous les extrêmes, est égal au Rectangle compris sous les moïennes; or le Rectangle compris sous la hauteur AB & le circuit V étant, par le Scholie qui suit la Prop. 5, double de la Surface du Cône X, & le Rectangle compris sous le circuit W & le rayon EF, l'étant aussi du Cercle N, par le Coroll. 3. de la Prop. 1., on conclut que leurs moitiés sont aussi égales,

V 2

&

& par égalité, que la Surface du Cône X est égale à celle du Cercle N dont le rayon EF est moïen Proportionnel entre la hauteur AB de sa Surface & le rayon CD ou CB de sa bâte; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IX.

THEOREME.

20 *fig.* LA Surface du Cône X est à celle de la bâte DV, comme la hauteur AB, de cette Surface au rayon BC de cette bâte.

DEMONSTRATION.

Car la Surface de ce Cône est, par le Coroll. 1. de la Prop. 5, égale à un Triangle Rectangle compris sous AB & le circuit de la bâte DU, & celle de cette bâte est, par le Coroll. 1. de la Prop. 1., égale à un Triangle Rectangle compris sous ce même circuit & le rayon CB, & ces deux Triangles sont entr'eux comme leur hauteur AB, BC par le Coroll. de la Prop. 1. du Liv. 6, & par égalité, la Surface de ce Cône X est à celle de la bâte DU, comme la hauteur AB, de cette Surface, au rayon BC de la bâte de ce Cône; ce qu'il falloit démontrer.

CO-

COROLLAIRE.

I.

Il suit évidemment de ce Theoreme que
la Surface, du Cône Equilateral ABC, est ^{20 fig.}
double de celle de sa bâte EF.

DEMONSTRATION.

Car les côtés AB, AC, BC sont égaux
entr'eux par 1, 1, & DB ou DC, est moi-
tié de BC ou de BA, & la Surface de ce
Cône est à celle de sa bâte, comme AB à
sa moitié DB ou DC par la Précédente; ce
qu'il falloit démontrer,

LEMME.

Que la bâte du Triangle Rectangle FGH ^{23 &}
soit égale au circuit de celle du Cône ADG, ^{24 fig.}
& que sa hauteur GF soit égale à AD; ain-
si la Surface de ce Triangle sera, par le
Coroll. 1. de la Prop. 5, égale à celle de
ce Cône; que l'on fasse passer par la pensée
le Plan BC Parallelement à la bâte de ce
Cône; il est évident que cette Section se-
ra un Cercle par le Lemme de la Prop. 2.
du Liv. 12, & que si la hauteur MF, du
petit Triangle FML Rectangle en M, est
égale à la hauteur AB, de la Surface du
petit Cône CAB; la Surface de ce petit

Triangle sera égale à celle de ce petit Cône par 2, 6 & par 3, comme aussi, par l'Axiome 5, du Liv. 1; la Surface du Trapeze MLGH à celle du Fragment BCDG, du Cône ADE ou à la moitié du Rectangle GY compris sous la hauteur GM, égale à DB, & la Droite GK, égale aux circonferences des Cercles BC, DG prises ensemble; de sorte qu'ainsi la Surface de ce Rectangle est double de celle du Fragment BCDG ou par égalité de celle du Trapeze MLGH.

DEMONSTRATION.

Parce qu'on suppose que GF est égale à AD, GM à DB & GH au circuit du Cercle X, ML la sera à celui du Cercle O, & que GY est un Rectangle par supp., ses côtés opposés seront égaux & ses Angles seront Droits, & que HK est égale à ML, LY le sera à GH, de sorte que LH étant commune les Trapezes N, O seront égaux en tout sens, parce que leurs côtés Homologues le sont de même aussi bien que les Angles compris entre ces côtés par la Déf. 19. & la 21 Prop. du Liv. 1; par conséquent le Rectangle GY, compris sous GK égale, par Supp., aux deux circonferences des Cercles X, O, est double du Trapeze MLGH ou par égalité de la Surface du Fragment BCDG; ce qu'il falloit & ce qu'on vouloit démontrer.



PROPOSITION X.

THEOREME.

LA Surface du Fragment DBCE, du Cô-Plan-
ne ADE, est égale à celle du Cercleche 3
M, dont le rayon OP, est moïen Propor-25 e.
tionnel entre la hauteur DB; de cette Sur-27 fig.
face, & la Droite N, égale, par constr.,
aux rayons ZB, XD, pris ensemble.

*On suppose que la Section BC soit Parallele
à la bāse DE.*

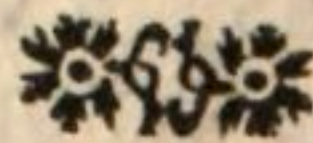
DEMONSTRATION.

DB. OP :: OP. N Parce que DB est;
OP. Q :: N. SSVV par supposit., à OP,
OP. N :: Q. SSVV comme OP à N,
DB. OP :: Q. SSVV & que le rayon
OP, du Cercle M, est, par 3, au circuit
Q, comme la somme des rayons XD, ZB
ou N, aux circuits SS, VV, des bāses X,
Z, il s'ensuit par la raison Alterne, que
OP est à N, comme le circuit Q aux circuits
SS, VV, & qu'enfin, la raison de OP à N,
étant, par la premiere proportion, égale à
celle

celle de DB à OP ; celle de DB à OP l'est aussi, par égalité, à celle du circuit Q aux circuits SS, VV ; & par 11, 6, que le Rectangle compris sous les extrêmes DB, SSVV, est égal au Rectangle compris sous les moyennes OP, Q, & par le Lemme précédent, que le Rectangle sous les extrêmes, est double de la Surface du Fragment DBCE & par le Coroll. 3 de la Prop. 1, que le Rectangle sous les moyennes l'est du Cercle M & qu'enfin, ces Rectangles étant égaux leur moitié l'est aussi, de sorte que, par égalité, la Surface du Fragment DBCE, est donc égale à celle du Cercle M, dont le rayon OP, est moyen Proportionnel entre la hauteur DB de cette Surface & la Ligne N égale, par Constr., aux deux rayons ZB, XD pris ensemble ; ce qu'il falloit démontrer.

L E M M E.

28 *fig.* Si on applique dans le Cercle NC les cordes égales CK, AM, & tire les Droites CA, KM, AK, on connoîtra aisément par le Coroll. 5. de la Prop. 17. du Liv. 3 & par celui de la Prop. 21 du Liv. 1., que la Droite CA, est Parallele à MK.



PRO-



PROPOSITION XI.

THEOREME.

SI on inscrit dans le Cercle NC, le Po-*même*
ligone Régulier AL, & de l'Angle C; *fig.*
on tire à l'extrémité du Diametre BD la
corde CD, & des Pointes des Angles C,
K, L, aux Pointes des Angles A, M, N,
les Droites CA, KM, LN; je dis que le
Rectangle compris sous le Diametre BD &
la corde CD, est égal au Rectangle com-
pris sous un des côtés de ce Poligone, com-
me sous CK ou BC, & une Ligne égale
aux trois CA, KM, LN prises ensemble.

DEMONSTRATION.

Car si on joint les Droites AK, LM, on
connoîtra aisément par le Lemme précéd.
& la Prop. 21 du Liv. 1, que les Angles,
BCA, CAK, AKM, KML, MLN &c.
sont égaux entr'eux, & que les Lignes CA,
KM, LN sont Paralleles entr'elles, & par
le Coroll. 5 de la Prop. 16. du Liv. 1, que
les Triangles Rectangles BEC, EFA, GFK,
GHM, HYL, YND sont Equiangles, &
par 4, 6, que le côté EC est à EB, com-
me le côté EA à EF, & que EA est à EF,

comme GK à GF, & que GK est à GF, comme GM à GH, & que GM est à GH, comme YL à YH, & qu'enfin YL est à YH, comme YN à YD, & par 10, 5, que l'Antecedent EC est au consequent EB, comme la somme des Antecedens EC, EA, GK, GM, YL, YN à la somme des consequens EB, EF, GF, GH, YH, YD, & par égalité, que EC est à EB, comme CA plus KM plus LN à BD, par ce que la somme des Antecedens composent les Droites CA, KM, LN; & la somme des consequens, le Diametre BC; & par 22, 3, que l'Angle BCD est Droit, & par les Prop. 5 & 4 du Livre 6, que EC est à EB, comme la Corde CD au côté CB, & par égalité, que CA plus KM plus LN est au Diametre DB, comme la corde CD au côté BC, du Poligone Régulier AL, & par 11, 6, que le Rectangle compris sous les extrêmes CA, KM plus LN, BC, est égal au Rectangle compris sous les moyennes BD, CD; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XII.

THEOREME.

LE Rectangle compris sous la partie YB, ^{31 fig.}
du Diametre DB; & la corde DC, est
égal au Rectangle compris sous le côté BC,
du Poligone Régulier AL; & une Ligne
égale aux Droites CA, KM, LY; moitié
de LN; prises ensemble &c.

*Comme la démonstration de ce Theoreme ne
differe en rien de celle du Précédent je passe
plus avant.*

AVERTISSEMENT.

Remarqués bien que par le plus grand
Cercle d'une Sphere, on entend celui, qui ^{Plan-}
a l'Axe de cette Sphere pour Diametre, ^{che 2}
en sorte que si par la pensée, on partage ^{22 fig.}
en deux parties égales la Sphere ZZ, la bâ-
se X ou, par égalité, la bâte V, sera le plus
grand Cercle de cette Sphere, puisque si hors
du Centre de la Sphere N, on fait passer ^{21 fig.}
par la pensée, le Plan ou Cercle DC, il est
très évident que la bâte ou Cercle, dont
CD est le Diametre, n'est pas si grand que
celui dont AB est le Diametre, ce qui suffit.
LEM-

L E M M E S.

I.

Plan-
che 3
28 fig.

Si on inscrit dans le plus grand Cercle de la Sphere NC, le Poligone Régulier AL, de manière que l'Axe de cette Sphere ou Diametre BD de ce Cercle, ne soit point coupé par les côtés de ce Poligone, on connoîtra évidemment que, faisant tourner par la pensée, les Triangles Isofceles BCA LDN, au tour des Lignes BE, YD, ces Triangles produisent par ces circonvolutions entières, les Cônes Droits CBA, LDN, & que faisant tourner de la même manière les Trapeses CAKM, KLMN autour des Lignes EG, GY, ces Trapeses décrivent par ces circonvolutions entières des Fragmens de Cônes Droits CKAM, KLMN.

I I.

31 fig.

Si on inscrit dans le Segment LBN, du plus grand Cercle MK de la Sphere NC, la partie LNB du Poligone Régulier AL, de manière que la partie YB de l'Axe ou Diametre BD, ne soit pas coupée par les côtés de ce Poligone, on connoîtra aisément par le Lemme précédent que faisant tourner par la pensée le Triangle Isofcele ABC autour de la partie BE du Diametre BD & les Trapeses CKAM, LKNM autour des parties EG, GY du même Diametre BD, le Triangle Isofcele décrit par sa circonvolution

lution entière le Cône CBEA, & ces Tra-
pèzes, les Fragmens de Cônes Droits CKAM,
KLMN &c.



PROPOSITION XIII.

THEOREME

LEs Surfaces des Cônes Droits CBA, ^{28 fig.}
LDN avec celles des Fragmens CAKM,
KLMN, ou par égalité, celle du Spheroï-
de BCKLDNMA est égale à celle d'un Cer-
cle X, dont le rayon OV est moïen Pro- ^{29 fig.}
portionnel entre le Diametre DB, du plus
grand Cercle de la Sphere NC, & la Ligne
ou corde DC.

PREPARATION.

Que la Ligne A soit moïenne Propor- ^{26 fig.}
tionnelle entre la hauteur BC, de la Surfa-
ce du Cône BCA, & le rayon CE de sa
bâse, & que la Ligne B la soit entre la hau-
teur CK, de la Surface du Fragment
CAMK, & une Ligne égale aux deux ra-
yons CE, KG de ses bâses, & qu'enfin la
Ligne C soit moïenne entre la hauteur KL,
de la Surface du Fragment KLMN, & une
Ligne égale aux deux rayons KG, LY, &
que la Ligne D soit moïenne Proportion-
nelle

nelle entre la hauteur LD, de la Surface du Cône LDN, & le rayon LY de sa base.

DEMONSTRATION.

Parceque les Lignes CA, KM, LN, prises ensemble, sont doubles des Lignes CE, KG, LY, prises de même, il s'en suit par 1, 2, que le Rectangle compris sous le côté BC ou CK &c. & une Ligne égale aux trois CA, KM, LN prises ensemble, est égal à la somme des Rectangles compris sous CB, CE sous CK, & une Ligne égale aux deux CE, KG, prises ensemble sous KL, ou CK, & une Ligne égale aux deux KG, LY, prises ensemble sous LD, LY; car il est très évident que le produit de la grandeur BC ou son égale CK ou KL, &c. multipliée par une Ligne égale aux trois Lignes CA, KM, LN prises ensemble, est égal aux produits de cette même grandeur BC multipliée par les deux moitiés de cette Ligne égale à ces trois Lignes prises ensemble &c.; or le Rectangle compris sous le Diametre DB & la corde DC étant, par Prop. 11., égal au Rectangle compris sous BC & une Ligne égale aux trois CA, KM, LN prises ensemble; & le rayon OV étant, par l'Hypothese, moyen Proportionnel entre DB, DC, on conclut par 12, 6 que son Quarré Z est, par égalité, égal aux quatre Rectangles sous CB, CE sous CK & une Ligne égale aux deux CE, KG sous KL & une Ligne égale aux deux

deux KG, LY sous LD, LY; & qu'enfin, la Ligne A étant moyenne entre la hauteur BC de la Surface du Cône BCA & le rayon CE de sa bâte, & la Ligne B entre la hauteur CK de la Surface du Fragment CAMK & les deux rayons CE, KG de les bâses, & la Ligne C entre KL & les deux rayons KG, LY, & enfin la Ligne D entre la hauteur LD de la Surface du Cône LDN & le rayon LY de sa bâte, la somme des quarez de ces moyennes, est, par 12, 6, égale à la somme des quatres Rectangles susdits ou, par égalité, au Quarré Z, & par le Coroll. 4 du Lemme qui suit la Prop. 13. du Liv. 6, que le Cercle, dont OV est le rayon, est égale à la somme des quatre Cercles auxquels les moyennes A, B, C, D servent de rayons, & qu'enfin, les Cercles auxquels les Lignes A, D servent de rayons étant égaux pris ensemble aux Surfaces des Cônes CBA, LDN prises de même par 8, & les Cercles auxquels les moyennes B, C servent de rayons l'étant, par 10, pris ensemble aux Surfaces des Fragmens CKAM, KLMN prises de même; ces quatre Cercles auxquels ces quatre moyennes servent de rayon le sont, par égalité, pris ensemble, aux Surfaces des quatre Solides CBA, KCAM, LKMN, LDN prises de même, & par égalité que le Cercle X, dont le rayon OV est moyen Proportionnel entre le Diametre DB, du plus grand Cercle de la Sphere NC, & la Ligne ou Corde DC, est égal à la somme des Surfaces des quatres Solides susdits, ou, par

par égalité, à celle du Spheroïde BCK &c.
ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

31 fig. LA Surface du Cône ABC avec celles des
Fragmens CKAM, LKMN ou, par
égalité, celle de la partie LBN du Sphe-
roïde LBNC, est égale à celle d'un Cer-
cle dont le rayon est moïen Proportion-
nel entre la Corde DC & la partie YB de
l'Axe ou Diametre BD, de la Sphere NC.

Voyés la Précéd. & la Prop. 12 &c.

LEMME.

Plan-
che 4
37 fig.

Soit Z le plus grand Cercle de la Sphere
ADNM, dans lequel soit inscrit le Poligo-
ne Régulier Z & la Ligne ou Corde AB ti-
rée du Point ou extrémité A, du Diame-
tre EA, à la Pointe de l'Angle B, de ce
Poligone, & que la Ligne D soit moïen-
ne Proportionnelle entre le Diametre EA
& la corde AB, & que par la pensée on
fasse tourner ce Poligone Z autour du Dia-
metre immobile EA; il est évident que ce
Poligone décrira par cette circonvolution
entière

entière un Solide EMAV qui vient d'être appelé Sphéroïde, dont la Surface est, par 13, égale à celle d'un Cercle dont le rayon est égal à la Ligne D; & qu'enfin, inscrivant dans ce même Cercle Z, un Polygone Régulier ECB de plus de côtés, que ce précédent & tirant la Droite ou Corde AC & prenant la Ligne D pour moyenne Proportionnelle entre le Diametre EA & la Corde AC & faisant tourner ce dernier Polygone ECB autour du Diametre EA; il décrit un Solide Semblable au précédent, qui par conséquent sera aussi appelé Sphéroïde, & dont la Surface sera par 13, égale à celle d'un Cercle qui a son rayon égal à la moyenne D entre EA, AC; si on inscrit dans ce Cercle Z un Polygone Régulier EDC de plus de côtez que ce précédent ECB, & tire, du Point A à l'Angle de ce dernier, la Droite ou Corde AD & si on prend la Ligne D pour moyenne entre EA, AD, & si on fait tourner ce dernier Polygone EDC autour du Diametre EA, on connoîtra encore que celui-ci décrit par cette circonvolution entière un Sphéroïde, dont la Surface est aussi égale à celle d'un Cercle qui a son rayon égal à la Ligne D moyenne, par supp., entre EA, AD; remarquons bien qu'à proportion qu'on a inscrit des Polygones Réguliers dans le Cercle Z, & tiré des Cordes AB, AC, AD, la Corde ou Ligne AB est aggrandie aussi bien que la moyenne D, suivant que ces Polygones avoient de côtez, & que les aiant fait tourner autour du Diametre EA ils ont décrit des Sphéroïdes plus approchant de l'égalité de

X

la

la Sphere ADN^M, suivant aussi qu'ils avoient plus de côtés; de sorte que si maintenant vous inscrives dans ce Cercle, par la conception, un Poligone d'une infinité de côtés & tirés une Corde de la même manière qu'on l'a dit premierement & prenez la Ligne D pour moyenne Proportionnelle entre le Diametre EA & cette dernière Corde; vous pourrés conclure évidemment, par la démonst. du Coroll. 1. de la Prop. 1. & la suite de la Déf. 8 du Liv. 12, en faisant tourner par la pensée ce Poligone Régulier, d'une infinité de côtés, autour du Diametre EA; que ce dernier Poligone décrit un Spheroïde qui est la Sphere même, & que cette dernière Corde est le Diametre même, & que la Ligne D étant, par supp., moyenne Proportionnelle entre ce Diametre & cette Corde, elle est égale à cette Corde ou à ce Diametre, puisqu'entre 4 & 4, par exemple il n'y a pas d'autre moyen Proportionnel que 4; & qu'ainsi la Surface de ce Spheroïde ou, par égalité, de cette Sphere, est égale à celle d'un Cercle dont la rayon est égal à son Diametre.





PROPOSITION XV.

THEOREME.

LA Surface de toute Sphere est égale à quatre fois celle de son plus grand Cercle.

DEMONSTRATION.

Car cette Surface est, par le Lemme précédent, égale à celle d'un Cercle dont le rayon est égal à son Axe, ou par égalité dont le Diametre est double de celui de son plus grand Cercle, & ce Cercle égal à la Surface de cette Sphere est, par la suite du Coroll. 4 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, Quadruple de son plus grand Cercle, & par égalité, la Surface de toute Sphere est Quadruple de son plus grand Cercle ou, ce qui est la même chose, est égale à quatre fois celle de son plus grand Cercle; ce qu'il falloit démontrer.

*Plan-
che 3
30 fig.*

SCHOLIES.

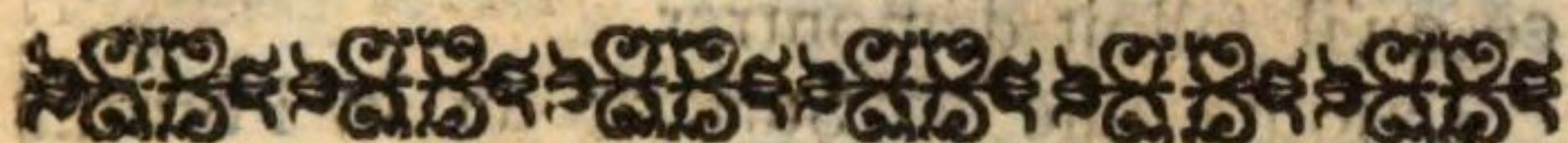
D'où il suit que pour mesurer la Surface de quelque Sphere que ce soit, il faut multiplier celle de son plus grand Cercle par 4, puisque par la Précéd. le produit est la Surface.

I I.

Où on multipliera le circuit de son plus grand Cercle par son Axe; car le produit est, par le Coroll. 4^e de la Prop. 1.^e, Quadruple de ce plus grand Cercle, & par conséquent égal à la Surface de cette Sphere.

De sorte donc que le Rectangle, compris sous le circuit du plus grand Cercle de quelque Sphere que ce soit & sous son Axe, est égal à la Surface de cette Sphere.





PROPOSITION XVI.

THEOREME.

LA Surface de la Portion LBN, de la Sphère LCN, est égale à celle d'un Cercle, dont BL est le rayon, mené de l'extrémité B à la circonférence du Cercle ZZ, qui sert de base à cette Portion. 31 fig.

DEMONSTRATION.

Car cette Sphere peut-être considérée comme un Sphéroïde produit par la circonvolution entière d'un Poligone d'un nombre infini de côtés, roulant autour du Diametre ou Axe BD, & par consequent la portion LBN, comme celle d'un Sphéroïde dont la Surface est, par 14, égale à celle d'un Cercle, dont le rayon est moïen Proportionnel entre la corde DC & la partie YB; je veux dire, en consequence du Lemme précéd., entre l'Axe DB, & la partie YB; de sorte que, BL étant aussi moïenne Proportionnelle entre ce même Axe DB & sa partie YB par le Coroll. 2 de la Prop. 5 du Liv. 6, on a raison de dire que la Surface de cette Portion LBN, de cette Sphere LCN, est, par égalité, égale

à celle d'un Cercle dont BL est le rayon ;
ce qu'il falloit démontrer.

*même
fig.*

J'ajoute que la Surface de la Portion LDN, est égale à celle d'un Cercle, dont LD est le rayon, mené de l'extrémité D, de l'Axe BD, à la circonference du Cercle ZZ qui sert de bāse à cette Portion.

DEMONSTRATION.

Car l'Angle BLD, au demi Cercle BKD, étant Droit par 22, 3, il s'ensuit par 20, 6 que le Cercle dont l'Axe BD est le rayon, est égal à la somme des deux Cercles auxquels BL, LD servent de rayons, & qu'enfin, le Cercle dont BD est le rayon étant égal à la Surface de la Sphere LCM par 15, & le Cercle, dont BL est le rayon, l'étant à la Surface de la Portion LBN par les raisons précédentes; le Cercle dont LD est le rayon est égal au reste de la Surface de cette Sphere, c'est-à-dire, à celle de la Portion LDN; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XVII.

THEOREME.

LA Surface du Cilindre FQBK, est éga- *Plan-*
le à celle de la Sphere Z, qui lui est *che 5*
inscrite. *40 fig.*

J'ajoute que si, par l'Axe de ce Cilindre, on fait passer par la pensée des Plans Parallèlement à sa bâte ou Perpendiculairement à cette Axe commun YA; les Surfaces des petits Cilindres qui en resultent, sont égales à celles des parties, de la Sphere Z, qu'ils contiennent.

DEMONSTRATION.

Parce que la hauteur BF de ce Cilindre, est égale au Diametre QF de sa bâte où à l'Axe YA de cette Sphere, il s'ensuit par le Coroll. 3 de la Prop. 7, que sa Surface est Quadruple de celle de sa bâte XX, & qu'enfin, cette bâte étant égale au plus grand Cercle de la Sphere Z, la Surface de cette Sphere est, par égalité, égale à celle de ce Cilindre, à cause que celle de cette Sphere est aussi Quadruple de ce Cercle

X 4

XX

328 LES PLUS BEAUX
XX par 15 ; ce qu'il falloit démontrer.

PREPARATION.

Tirés les Droites AO, OY.

DEMONSTRATION.

L'Angle AOY au demi-Cercle est Droit par 22, 3, & la Droite OY est, par le Coroll. 3. de la Prop. 5. du Liv. 6, moyenne Proportionnelle entre l'Axe YA & sa partie YS, & le Diametre VG est égal à YA & YS à GB, & par égalité la Droite YO est moyenne Proportionnelle entre VG, GB, & par 6 le Cercle dont YO est le rayon, est égal à la Surface du petit Cilindre GBVK, & ce même Cercle, est par la suite de la précéd., égal à la Surface de la Portion OYO de la Sphere Z, & par l'Axiom. 3. du Liv. 1., la Surface de ce petit Cilindre est aussi égale à celle de la Portion OYO qu'il contient; ce qui restoit à démontrer.

Car on démontrera facilement de la même manière, en tirant les Droites AR, RY, que la Surface, du Cilindre EBNK, est égale à celle de la Portion RYT, & qu'enfin celle du Cilindre GBVK étant égale à celle de la Portion OYO, celle du Cilindre EGVN l'est, par l'Axiom. 5. du Liv. 1, à celle du reste de cette Portion RYT, c'est-à-dire à celle du Solide ROOT.

Le reste s'ensuit par les mêmes raisons &c.

PRO-



PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

SI par l'Axe de la Sphere Z, on fait passer par la Pensée des Plans Perpendiculairement à cet Axe; je dis que les Surfaces des parties de cette Sphere sont entr'elles comme les parties de son Axe. *même fig.*

DEMONSTRATION.

Car les Surfaces des parties de cette Sphere, qui correspondent à celles des Portions du Cilindre FQBK, qui lui est circonscrit sont égales, par la suite de la précéd., à ces Surfaces, & les parties du Cilindre HQ sont aussi des Cilindres, qui ayant mêmes ou égales bāses, leurs Surfaces sont, par le Coroll. 3. de la Prop. 4, entr'elles, comme leur hauteur YS, SM, MW, W&, &A, & par égalité les Surfaces des parties de cette Sphere, sont entr'elles, comme les parties de son Axe; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIX.

THEOREME.

*Plan-
che 3.
30 fig.* LA Sphere X est égale à un Cône dont la hauteur est égale au rayon de cette Sphere, & la bāse à la Surface de cette Sphere.

DEMONSTRATION.

Car si on considere cette Sphere, comme composée d'une infinité de petits Cônes, & sa Surface comme composée de toutes les bāses de ces petits Cônes, & son Centre comme la Pointe commune de tous ces petits Cônes, on connoitra aisément par la Défin. de la Sphere, que tous ces Cônes ont mêmes hauteurs & par le Coroll. 1. de la Prop. 2. du Liv. 12 que la somme de tous ces petits Cônes ou, par égalité, cette Sphere X, est égale à un Cône, dont la hauteur est égale au rayon de cette Sphere & la bāse à la Surface de cette Sphere; ce qu'il falloit démontrer.

SCHO-

SCHOLIE.

Il suit de ce Theoreme que pour mesurer quelque Sphere que ce soit, il faut multiplier sa Surface par le tiers de son rayon, ou par la sixième partie de son Axe ou Diametre.

Car toute Sphere étant égale à un Cône dont la hauteur est égale à son rayon & la bāse à sa Surface, on conclut évidemment par 5, 12 que le produit, de la bāse de ce Cône ou, par égalité, de la Surface de cette Sphere, multipliée par le tiers de la hauteur de ce Cône, ou, par égalité, par le tiers du rayon de cette Sphere, ou bien par la sixième partie du Diametre de cette Sphere, est la Solidité de cette Sphere; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XX.

THEOREME.

Tout Secteur de Sphere est égal à un Cône dont la hauteur est égale au rayon de cette Sphere, & la bâte à celle de ce Secteur.

C'est ce qui est très évident par la Précéd.

COROLLAIRES.

I.

Plan-
che 4
33 fig.

Parce que par la 1, partie de la Prop. 16, la Surface de la Portion DBEFG de la Sphere X, est égale à celle d'un Cercle dont DE est le rayon, & que par la seconde de la même, celle de la Portion DBC, est égale à celle d'un Cercle dont la Droite DC est le rayon, il s'ensuit par le Theoreme précédent, que le Secteur ABDEFG est égal à un Cône dont la hauteur est égale à celle du rayon CA ou AE, & à la bâte duquel la Droite DE sert de rayon.

I I.

Et que le Secteur BADC est égal à un *même*
Cône, dont la hauteur est égale au rayon *fig.*
CA ou AE, & à la bâte duquel la Droite
DC sert de rayon.

SCHOLIES.

I.

Il suit des raisons précédentes que pour
mesurer les Secteurs BADC, BFADGE de *même*
la Sphere X, il faut multiplier la Surface *fig.*
de leur bâte par le tiers du rayon de cette
Sphere.

I I.

Ou bien on multipliera celles des Cer-
cles auxquels les Droites DC, DE servent *même*
de rayons, par le tiers du rayon AC ou AE *fig.*
&c.

I I I.

Et qu'enfin pour mesurer la solidité du
Segment BZCD de la Sphere X, il faut lui *même*
ajouter le Cône ABD qui par les raisons *fig.*
précédentes nous donne lieu de mesurer celle
de ce Segment, parce que mesurant celle
de ce Secteur, & ôtant de sa valeur, celle
du Cône ABD, le reste est évidemment la
Solidité du Segment BCZD.

I V.

Il est évident que pour mesurer celle du Segment BDE, il le faut diviser en un Secteur BEAD & un Cône BAZD, puis &c.

On a supposé que ce Segment fut plus grand qu'une demie ou Hemi-Sphere.



PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Plan-
che 5
9 fig.

LE Hemi-Sphere GNAND est double du Cône GAD dont la bâte XX est la même que celle de ce Hemi-Sphere, comme aussi la hauteur HA.

DEMONSTRATION.

Car XX étant le plus grand Cercle de la Sphere W, il s'ensuit par 15 que la Surface de cet Hemi-Sphere est double de celle de ce plus grand Cercle, & par 19, qu'un Cône dont la hauteur est égale au rayon HA de cet Hemi-Sphere & la bâte, à sa Surface ou, par égalité, au double de celle de cet Hemi-Sphere XX, est égale à cet Hemi-Sphere, & par le Coroll. 1 de la Prop. 2. du Liv. 12, que ce Cône

ne égal à cet Hemi-Sphere, est double du Cône GAD, & par égalité, que cet Hemi-Sphere GNAND est aussi double du Cône GAD dont la bâte XX est la même que celle de cet Hemi-Sphere comme aussi la hauteur HA; ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

On dit que deux Quantités sont en Raison Sesquialtere, lorsqu'elles sont entr'elles comme ces deux Nombres 6, 4 ou 3, 2, où l'on voit que l'Antécédent 3 contient une fois & demi le consequent 2.



PROPOSITION XXII.

THEOREME

LE Cilindre EFCB, qui est circonscrit à la Sphere W, est à cette Sphere en Raison Sesquialtere. *Planche 5*

Et la Surface entière, de ce Cilindre, est à celle de cette Sphere, en Raison Sesquialtere. *39 fig.*

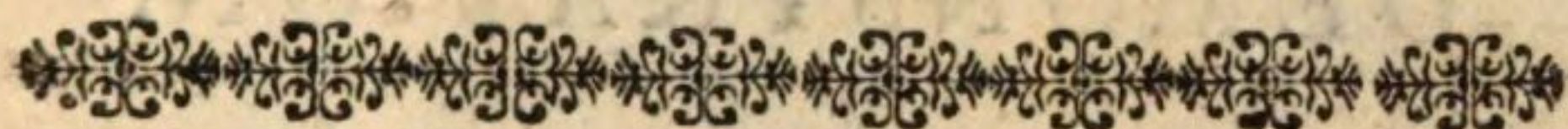
DEMONSTRATION.

Si par la pensée on divise cette Sphere en deux également par le Plan ou Cercle Perpendiculaire, XX , on connoitra aisément, par l'Avertissement qui suit la Prop. 12, que ce Plan est son plus grand Cercle & qu'en inscrivant dans l'Hemi-Sphere $GNAND$ le Cône Droit GAD , dont la bâte XX est la même que celle de cet Hemi-Sphere; le Cilindre $CGDB$ est, par 5, 12, Triple du Cône GAD , & que ce Cône est, par 21, moitié de cet Hemi-Sphere, & qu'ainsi ce Cilindre $CGDB$ est à cet Hemi-Sphere comme 3 à 2, & que le double du Cilindre CB c'est-à-dire le Total $EFCB$ est, par égalité, au double de cet Hemi-Sphere c'est-à-dire à la Sphere W , comme 6 à 4 ou comme 3 à 2, & par la Remarque précédente, que ce Cilindre est à cette Sphere en Raïson Sesquialtere; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que le Cilindre $EFCB$ a sa hauteur CE ou BF égale au Diametre EF de sa bâte, il s'ensuit par le Coroll. 3 de la Prop. 7, que sa Surface est Quadruple de celle de sa bâte, & qu'enfin, cette bâte ou Cercle ZZ étant égal au plus grand XX de la Sphere W , la Surface de cette Sphere est, par 15, Quadruple de ce Cercle ZZ & qu'ain-

Qu'ainsi ajoutant à celle de ce Cilindre, qui est égale à celle de cette Sphere, celles de ses deux bâses, la Surface entière de ce Cilindre est à celle de cette Sphere, comme 6 à 4 ou bien, comme 3 à 2, & par la Remarque précéd., que la Surface entière de ce Cilindre est à celle de cette Sphere en Raison Sesquialtere; ce qui restoit à démontrer.



PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

LA Surface de la Sphere W, est double *Plan- che 4* de celle du Cilindre Quadrangulair *36 fig.* AFCG qui lui est inscrit.

J'ajoute que la Surface de cette Sphere est à l'entière de ce Cilindre, comme 4 à 3.

DEMONSTRATION.

Car si on tire par la pensée le Plan Diametral FC, on connoitra aisément par 20, 6, que le Cercle GCFAB décrit sur FC, est double du Cercle OO ou du Cercle SS décrit sur FG, & par le Coroll. 3 de la Prop. 7, que la Surface, du Cilindre AFCG, est Quadruple de celle de ce Cercle SS, & par 15, que la Surface de la Sphere W, l'est aussi de celle de son plus grand

grand Cercle AFCBG, & que quatre fois le Cercle SS ou, par égalité, la Surface du Cilindre AFCG ne fait que la moitié de quatre fois ce Cercle AFCBG ou, par égalité, de la Surface de la Sphere W & qu'ainsi, la Surface de cette Sphere, est double de celle de ce Cilindre; ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que la Surface, de cette Sphere, est double de celle de ce Cilindre, & que celle de ce Cilindre l'est de la somme de celles de ses deux bâses, il s'ensuit évidemment, que l'entière de ce Cilindre, est à celle de cette Sphere, comme 6 à 8 ou comme 3 à 4 & qu'ainsi, celle de cette Sphere est à l'entière de ce Cilindre comme 4 à 3; ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de ce Theoreme que la Surface entière du Cilindre circonscrit à une Sphere, est à l'entière de celui qui y est inscrit en raison de 2 à 1.



DEMONSTRATION.

Car l'entière du Circonscrit est à celle de cette Sphere, en raison de 3 à 2 ou de 6 à 4 par la seconde partie de la Prop. 22, & celle de cette Sphere, est à l'entière de celui qui lui est inscrit, en raison de 4 à 3 par la seconde partie de la précéd., & les Surfaces de ces trois Solides sont entr'elles, comme ces trois nombres 6, 4, 3 ou l'on voit que la Surface entière du Cilindre circonscrit, est à l'entière de l'inscrit, en raison de 6 à 3 ou de 2 à 1.; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXIV.

T H E O R E M E.

LA Surface de la Portion ABCDE de la Plan-Sphere X, est à la Surface du Cône *che* 4 ACE, qui lui est inscrit, comme la hau- 34 *fig.* teur CA ou CE, de la Surface de ce Cône, au rayon AO ou OE de la bâte commune AOE.

DEMONSTRATION.

Car la Surface de cette Portion est, par 16, égale à celle d'un Cercle dont CA ou CE est le rayon, & le Cercle dont CE est le rayon est, par le Coroll. 3 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, au Cercle AOE, dont OA, est le rayon, en raison doublée de celle de CE à OE, & celle de CE à OE est, par 9, égale à celle de la Surface du Cône ACE à sa bête AOE, & par égalité, le Cercle, dont CE est le rayon, est au Cercle AOE, en raison doublée de celle de la Surface du Cône ACE à sa bête AOE, & la raison du Cercle, dont CE est le rayon, est, par la Définition. 11. du Liv. 5, à la Surface du Cône ACE, comme cette même Surface à la bête AOE, & par égalité la Surface de la Portion ABCDE, est à celle du Cône ACE, comme celle de ce Cône à celle de la bête AOE ou, par 9, comme la hauteur CE, de celle de ce Cône, au rayon OE de celle de la bête commune AOE; ce qu'il falloit démontrer.

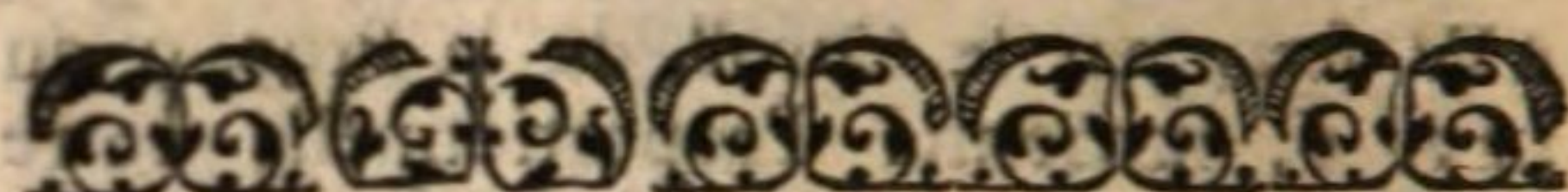
L E M M E.

Plan-
che 4
35 fig.

Soit inscrit dans le Cercle X le Triangle Equilateral ABC & du sommet B, abaissée sur le milieu de AC, la Ligne BD qui par 3, 3 sera Perpendiculaire à cette Droite AC, & passera par le Centre O, de sorte

te que l'Angle AWB étant Droit, la Ligne AW fera, par le Coroll. de la Prop. 9 du Liv. 6, moïenne Proportionnelle entre DH, WB, & par 12, 6, le Rectangle compris sous les extrêmes DW, WB sera égal, au Quarré de la moïenne AW, & par le Coroll. 3 de la Prop. 13 du Liv. 4, la Ligne DW sera égale autiers de WB, & par 1, 6, le Rectangle compris sous WB, WD ou, par égalité, le Quarré de AW sera Triple du Quarré de DW, & par la suite du Coroll. 4. du Lemme qui suit la Prop. 13 du même Liv., le Quarré du rayon DO, fera Quadruple du Quarré de WD, à cause que DO est double de DW, & le Quarré de DO sera, par consequent, au Quarré de DW, comme 4 à 1., & celui de AW, sera à celui de DO, comme 3 à 4, & par le Coroll. 4 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, le Cercle X, auquel DO sert de rayon, sera au Cercle ZZ, auquel NA sert de rayon, en raison de 4 à 3.





PROPOSITION XXV.

THEOREME.

Plan-
che 4
34 fig.

LA Surface de la Portion ABCDE de la Sphere X, est double de celle du Cône Equilateral ACE qui lui est inscrit.

DEMONSTRATION.

Car si du sommet C, on abaisse l'Axe CHOF, on connoîtra aisément par 24, que la Surface de cette Portion, est à celle de ce Cône, comme CA à AO, & par le Lemme précéd., que CA est double de AO, & par égalité, que la Surface de cette Portion, est double de celle de ce Cône Equilateral ACE qui lui est inscrit; ce qu'il falloit démontrer.

J'ajoute que la Surface de la Sphere X, est à l'entière de ce Cône Equilateral EAC qui lui est inscrit en raison de 16 à 9.

DEMONSTRATION.

Car la Ligne CO étant, par le Lemme précédent, triple de la Ligne FO, on conclut évidemment, par 18, que la Surface

face de la Portion ABCDE l'est aussi de celle de la Portion AFE, & que si la Surface de cette Sphere est, par exemple, de 16 piéds Quarrez, celle de la Portion ABCDE l'est de 12 & celle de la Portion AFE de 4, & par la Précéd., que celle de ce Cône l'est de 6 & par le Coroll. 1. de la Prop. 9, que la Surface entière de ce Cône Equilateral est de 9 piéds Quarrés; par consequent, celle de cette Sphere X l'étant de 16, on a raison de dire que la Surface de cette Sphere est à l'entière de ce Cône, comme 16 à 9; cequ'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXVI.

THEOREME

LA Surface de la Sphere ZXX, est à l'entière du Cône Equilateral ABC qui lui est circonscrit, en raison de 4 à 9. *Planche 4 38 fig.*

DEMONSTRATION.

Car si du Centre V, on décrit, de l'ouverture VB ou VA, le Cercle YN, & du sommet B on abaisse sur le milieu de AC la Droite BH, on connoitra aisément, par le Lemme précéd., que cette Droite BH

Y 4

est

est Perpendiculaire à AC, & qu'elle passe par le Centre V de cette Sphere, & que la partie ZH est égale au Quart de BH, & qu'évidemment BH est double de ZM, & par le Coroll. 4 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, que le Cercle YN est au Cercle SS, comme 4 à 3, & qu'ainsi le Cercle XZX est au Cercle SS, comme 1. à 3, & par le Coroll. de la Prop. 9, que la Surface entière du Cône Equilateral circonscrit ABC, est au Cercle XZX, comme 9 à 1., & par 15, que la Surface de cette Sphere ZXX est à celle de ce Cercle XZX, comme 4 à 1, & qu'ainsi, la Surface entière de ce Cône Equilateral circonscrit ABC, est à celle de la Sphere ZXX, en raison de 9 à 4, ou, ce qui est la même chose, que la Surface de cette Sphere, est à celle de ce Cône Equilateral en raison 4 à 9; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

LA Surface entière du Cône Equilateral ABC circonscrit à la Sphere ZXX, est à l'entière de l'inscrit DME, comme 4 à 1. *même fig.*

DEMONSTRATION.

Car la Surface entière du Circonscrit ABC est, par la Précéd., à celle de cette Sphere en raison de 9 à 4, ou, par égalité, comme 36 à 16, & celle de cette Sphere, est à l'entière de l'inscrit, en raison de 16 à 9 par la suite de la Prop. 25, & la Surface entière du Circonscrit ABC, est à l'entière de l'inscrit DME, comme 36 à 9 ou, par égalité, comme 4 à 1.; ce qu'il falloit démontrer.

Autre DEMONSTRATION.

Parce que l'Axe BH est double de l'Axe ZM, & que les Points Z, O sont les milieux des rayons HV, ZV, on conclut évidemment que le côté AC est double du

Y 5

côté

côté DE, & par la suite du Coroll. 4 du Lemme qui suit la Prop. 13 du Liv. 6, que le Cercle SS est, par le même Coroll., Quadruple du Cercle TT, & que si par exemple le Cercle SS est de 4 pieds Quarrés, le Cercle TT l'est d'un, & par le Coroll. de la Prop. 9, que la Surface entière du Cône ABC est de 12 pieds Quarrés & que l'entière du Cône DME l'est de 3, & que par conséquent celle du Cône ABC est Quadruple de celle du Cône DME, à cause que 12 l'est aussi de 3.



PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

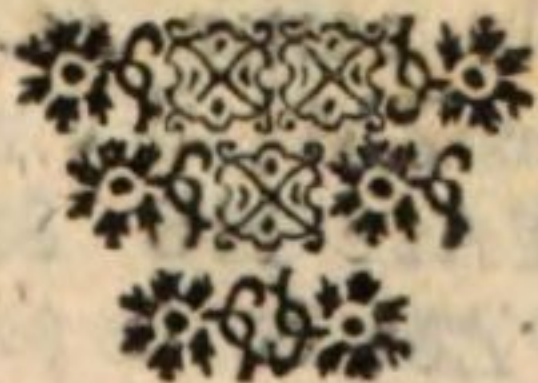
LA Sphere X est au Cône Equilateral ABC qui lui est inscrit, en raison de 32 à 9.

DEMONSTRATION

Plan-
che 4
35 fig.

Car si par la pensée, on divise cette Sphere en deux également par son plus grand Cercle NN, de manière que cette Section NN soit Parallele à la bâte ZZ de ce Cône, & si on tire les Droites PB, MB & si du som-

sommet B, on abaisse l'Axe BD dont la partie WB sera celui du Cône ABC & la partie OB celui du Cône PBM; on connoîtra aisément par le Lemme précédent que WD est le quart de l'Axe BD, & que BW, est au rayon BO, comme 3 à 2 ou, par égalité, comme 9 à 6, & que la bâte ZZ est au plus grand Cercle ABCE ou NN, de la Sphere X, comme 3 à 4 ou 6 à 8, & par le Scholie de la Prop. 8 du Liv. 12, que les Cônes ABC, PBM sont entr'eux en raison composée de celles de leur hauteur & de leur bâte, & que venant de prouver que la hauteur WB étoit à la hauteur BO, comme 9 à 6, & la bâte ZZ à la bâte NN, comme 6 à 8, il s'ensuit par la Remarque 2 faite sur la Défin. 15 du Liv. 5, que le Cône ABC est au Cône PBM comme 9 à 8, & qu'enfin la Sphere X étant, par, 21, Quaduple du Cône PBM, cette Sphere est à ce Cône PBM, comme 32 à 8 & que par consequent sa raison d'avec le Cône Equilateral ABC qui lui est inscrit est, comme 32 à 9; ce qu'il falloit démontrer.





PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

Plan-
che 4
38 fig.

LE Cône Equilateral ABC circonscrit à la Sphere XZX, est à l'Equilateral DME qui y est inscrit, en raison Octuple c'est-à-dire comme 8 à 1.

DEMONSTRATION.

Car si à ce Cône ABC, on circonscrit le Cercle YN & prolonge l'Axe BZ jusqu'en H, on connoitra aisément par le Lemme précéd., que ce prolongement ZH, est égal au quart de l'Axe HB ou, par égalité, au rayon ZV ou VM, & qu'enfin, ZV plus VM faisant la moitié de l'Axe HB, cette Axe HB est double de l'Axe ZM; de manière que la partie ZO étant égale au quart de l'Axe ZM, il y aura ainsi même raison entre l'Axe HB & sa partie ZB, qu'entre l'Axe ZM & sa partie OM comme aussi, par la raison Alterne, entre l'Axe HB & l'Axe ZM, qu'entre la partie ZB & la partie OM, de sorte que l'Axe HB étant double de l'Axe ZM, ZB sera aussi double de OM, & la bāse AZC la fera de la bāse DOE, à cause des Triangles semblables ABC,

ABC, DME par 4, 6; par conséquent le Cûbe de AZC étant 8 & le Cûbe de DOE 1., le Cône ABC sera au Cône DME en raison de 8 à 1 par le Coroll. de la Prop. 7 du Liv. 12 & le 1. de la Prop. 23 de 11; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XXX.

THEOREME.

SI on circonscrit à la Sphere XZX le Cône Equilateral ABC, je dis que ces deux Corps sont entr'eux, tant à l'égard de leur Solidité que de leur Surface entière, en raison de 9 à 4. *même fig.*

DEMONSTRATION.

Car ce Cône ABC est, par la Précéd., au Cône Equilateral DME, qui est inscrit dans cette Sphere XZX, en raison de 8 à 1, ou, par égalité, comme 72 à 9, & cette Sphere est, par 28, à ce Cône Equilateral DME, comme 32 à 9, & par égalité le Cône Equilateral ABC, est à cette Sphere, en raison de 72 à 32. ou, ce qui est la même chose, comme 9 à 4;

Et la Surface entière de ce Cône Equilateral ABC est, par 26, à celle de cette Sphere

Sphere XZX en raison de 9 à 4; ce qu'il falloit, & restoit à démontrer.

AVERTISSEMENT.

On dit que trois Quantités sont en raison Sesquialtere continuée, lorsqu'elles sont entr'elles, comme ces trois nombres, 9, 6, 4, où l'on voit que, comme le premier 9, contient une fois & demi le second 6, de même ce second 6, contient une fois & demi le troisiéme 4. &c.



PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

*Plan.
che 5
41 fig.*

SI on circonscrit à la Sphere X le Cône Equilateral ABC & le Cilindre DEFG, je dis que ces trois Corps seront entr'eux tant à l'égard de leur solidité que de leur Surface entière, en Raison Sesquialtere continuée.

DEMONSTRATION.

Parce que le Cône Equilateral circonscrit ABC est, par la Précéd., à cette Sphere X tant à l'égard de sa Solidité que de sa Sur-

Surface entière en raison de 9 à 4, & que le Cilindre DEFG est, par 22, à cette même Sphere tant à l'égard de sa Solidité que de sa Surface entière en raison de 6 à 4, & que ces trois Solides sont entr'eux, tant à l'égard de leur solidité que de leur Surface entière, en même raison que ces trois nombres 9, 6, 4, il s'ensuit par l'Avertissement précédent que ces trois Corps ABC, DEFG, X, sont entr'eux, tant à l'égard de leur Solidité que de leur Surface entière, en Raison Sesquialtere continuée; ce qu'il falloit démontrer.

F I N.



TABLES



T A B L E S

D E S

L I V R E S

D E C E

T R A I T É^l

Explication de la Table suivante.

L Es Chiffres de la Colonne *A*, indiquent les Propositions du premier Livre de ce Traité, & les Chiffres de la Colonne *B*, les Propositions du premier Livre des Elémens d'Euclide.

Remarqués bien que les Asterisques ou Etoiles qui sont entre les Chiffres de la Colonne *A*, indiquent les Corollaires de la Proposition indiquée par le Chiffre qui précède ces Etoiles, de manière que les deux Etoiles, qui suivent le nombre 5 de la Colonne *A*, indiquent deux Corollaires de la Proposition cinquième du premier Livre de ce Traité.

Les petits Triangles Δ , indiquent les Lemmes de la Proposition indiquée par le Chiffre qui

DES LIVRES.

qui suit ces petits Triangles, de sorte que le petit Triangle Δ qui suit le nombre 7 de la Colonne A, indique le Lemme de la Proposition huitième,

Les marques § indiquent les Scholies de la Proposition (indiquée par le Chifre qui est avant ces marques §) ou quelque fois des Corollaires indiquez par les Etoiles qui sont avant ces marques §.

Remarqués encore que lorsque les Chifres de la Colonne B sont les mêmes que leur opposé de la Colonne A ; qui indiquent les Propositions du premier Livre de ce Traité ; ils marquent que ces Propositions sont suivies comme dans Euclide & qu'elles sont les mêmes, de maniere donc que les quatre premieres Propositions du premier Livre de ce Traité, sont aussi les quatre premieres du premier Livre des Elemens d'Euclide, parce que les quatre premiers Chifres de la Colonne A, sont opposez à leur égaux de la Colonne B qui indiquent les quatre premieres Propositions du premier Livre des Elemens d'Euclide.

Mais le nombre 6 de la Colonne B, qui est opposé au nombre 5 de la Colonne A, indique que la Proposition cinquième du premier Livre de ce Traité, est la sixième du premier Livre des Elemens d'Euclide ; & le nombre 5 de la Colonne B, qui est opposé à l'Etoile qui suit le nombre 5 de la Colonne A, indique que le premier des Corollaires de la Proposition cinquième du premier Livre de ce Traité, est la Proposition cinquième du premier Livre des Elemens d'Euclide.

Remarqués encore que les Zero de la Colonne B, qui sont opposez à des Chifres, Etoiles,
Z les,

T A B L E S

les, petits Triangles, marques § de la Colonne A, ils indiquent que les Propositions, Corollaires, Lemmes, Scholies indiquées par ces Chifres, F.oiles, petits Triangles, Marques §, sont ajoutées au premier Livre de ce Traité; ce qui suffit.

Il est aisé de comprendre que l'explication des sept Tables suivantes, ne differe en rien de l'explication de celle ci &c.

Table du Livre premier.

A	B	A	B
1	1	15	15
2	2	Δ	0
3	3	16	32
4	4	*	16
5	6	*	0
*	5	*	0
*	0	*	0
6	20	*	17
*	0	17	18
*	0	8	0
7	22	*	19
Δ	0	*	24
8	8	*	25
9	9	18	21
10	10	19	23
11	11	20	26
12	12	21	29
13	13	*	28
*	0	22	30
*	0	23	31
*	0	24	33
14	14	25	34
			26

DES LIVRES.

A	B	A	B
26	35	29	42
27	36	30	43
§	0	31	44
28	37	32	45
*	38	33	46
*	39	34	47
*	40	§	0
*	41	35	48

Table du Livre second.

A	B	A	B
Δ	0	7	7
1	1	8	8
2	2	9	9
3	3	10	10
4	4	11	11
5	5	12	12
6	6	13	13
		14	14

Table du Livre troisième.

A	B	A	B
1	1	8	8
2	2	*	0
*	0	9	10
3	3	10	11
4	4	11	12
5	5	12	13
6	6	13	14
7	7	14	15
*	9	15	16
			*

T A B L E S

A	B	A	B
*	18	21	30
16	19	22	31
17	20	23	17
*	21	24	32
*	0	25	33
*	26	26	34
*	27	27	35
*	28	5	0
*	29	28	36
18	22	*	0
19	23	*	0
20	25	*	37

Table du Livre quatriéme.

A	B	A	B
1	1	10	10
2	2	11	11
3	3	12	12
4	4	*	13 & 14
5	5	13	15
6	6	*	0
7	7	*	0
8	8	*	0
9	9	14	16

Table du Livre cinquiéme.

A	B	A	B
7	7	9	11
*	9	10	12
8	8	11	15
*	10	12	0
			13

DES LIVRES.

A	B	A	B
13	24	17	0
14	25	18	0
15	0	19	0
*	0	20	0
16	0	21	0

Table du Livre sixième.

A	B	A	B
1	1	11	16
*	0	12	17
2	2	*	0
*	0	13	18
3	3	*	20
*	0	Δ	0
4	4	*	19
*	0	*	20
*	6	*	0
*	5	*	0
5	8	*	0
*	0	14	21
*	0	15	22
*	0	16	23
6	10	9	0
9	0	*	0
7	11	*	0
8	12	17	24
9	13	*	0
*	0	18	25
10	14	19	30
*	15	20	31
*	0	21	33

T A B L E S

Table du Livre onzième.

A	B	A	B
1	1	18	20
*	2	19	21
2	3	20	24
3	4	21	25
4	5	*	32
5	6	*	31
6	7	*	0
7	8	22	28
8	10	Δ	0
9	11	23	33
10	12	*	0
11	13	*	0
12	14	24	34
13	15	*	0
14	16	*	0
15	17	Δ	0
16	18	25	36
17	19	26	37
		27	40

Table du Livre douzième.

A	B	A	B
1	1	Δ	0
Δ	0	5	10
2	5 & 6	6	13
*	11	*	14
*	0	7	12
3	7	*	0
4	8	8	15 & 9
		9	18

E R R A T A.

Page 118. dans la Démonstration ligne 4. DAE *lisez* DAC, pag. 153. 15. ligne. 4. 56. *lisez* 4. 5. 6. pag. 155, ligne 4. en cas ce. *lisez* en ce cas. pag. 241. au titre de la pag. Liv. VI. *lisez* Liv. XI. pag. 243. la même faute; aussi bien que 213. au lieu de 243. pag. 320. Proposition XVI. *lisez* XIV.

Au titre des 5 dernières Planches. Elements de Geom. Liv. 13. *lisez* les plus beaux Theo. d'Archymede.

AVIS AU RELIEUR.

Les Planches doivent être mises à la fin de chacun de leurs Livres.



Fischbach, ...

Elemens de Geometrie

Haye 1723

Math.p. 148

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081782-2